Tabelas de dispersão

Estruturas de Dados

Marco A L Barbosa
malbarbo.pro.br

Departamento de Informática
Universidade Estadual de Maringá

Vimos que algumas vezes informações sobre características da entrada nos permitem desenvolver algoritmos e estruturas de dados mais eficientes. Por exemplo:

- Se um arranjo está ordenado, então podemos fazer uma busca binária em vez de uma busca linear;
- Se as chaves para inserção em uma ABB são uniformemente distribuídas, então a altura da árvore será pequena e as operações serão eficientes.

Além disso, quando a entrada não tem essas características, ainda podemos tomar algumas providências:

- Modificar a entrada, como por exemplo, ordenar os valores para fazer a busca binária;
- Fazer o rebalanceamento em ABB, se as chaves não são uniformemente distribuídas, para manter a altura da árvore pequena.

Desafio

Vimos que podemos implementar as operações de busca, inserção e remoção do TAD Dicionário usando árvores AVL com tempo $O(\lg n)$. Será que podemos fazer melhor se soubermos algo sobre as entradas (chaves)?

Na definição do TAD as chaves eram strings, e se as chaves fossem inteiros?

E se as chaves estiverem em um intervalo específico, entre 0 e 10.000?

Como tirar proveito desse conhecimento sobre as chaves para fazer uma implementação eficiente?

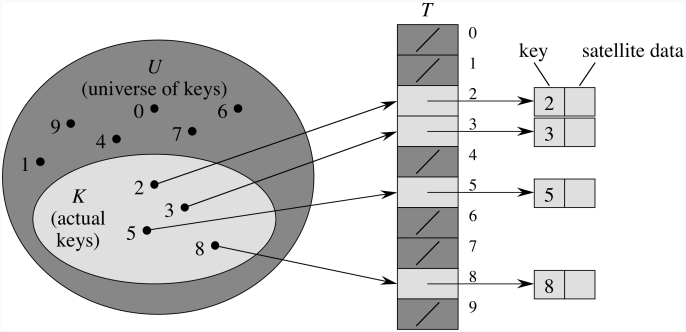
Endereçamento direto

Podemos criar um arranjo com uma posição para cada possível chave da entrada, armazenamos na posição o valor associado à chave, se houver tal valor, ou `None` caso contrário.

Essa estratégia é chamada de **endereçamento direto**.

De forma geral, para chaves no intervalo de 0 a $M - 1$, alocamos um arranjo com M posições.

Endereçamento direto



Endereçamento direto

Implemente um dicionário que associa número naturais a strings usando endereçamento direto.

```python
# As restrições (assert) sobre as
# chaves foram omitidas.
class Dicionario:
    valores: list[str | None]

    def __init__(self, m: int) -> None:
        assert 0 <= m
        self.valores = [None] * m

    def busca(self, chave: int) -> str | None:
        return self.valores[chave]

    def associa(self, chave: int, valor: str):
        self.valores[chave] = valor

    def remove(self, chave: int):
        self.valores[chave] = None
```

Qual é a complexidade de tempo das operações de dicionário usando endereçamento direto? $O(1)$.

Quais são as desvantagens/limitações dessa estratégia?

- Se a quantidade de chaves é muito menor que M, então existe um desperdício muito grande de memória. Além disso, a quantidade de memória disponível pode não ser suficiente.
- As chaves precisam ser maiores que 0.
- As chaves são restritas a inteiros.

Vamos isolar e tentar lidar com cada uma dessas questões separadamente.

Intervalos quaisquer

O que podemos fazer se as chaves estão em um intervalo $[A, B)$ qualquer?

Podemos *mapear* cada chave para um valor distinto no intervalo $[0, B - A)$:

$A \to 0, (A+1) \to 1, \ldots, (B-1) \to (B-A-1)$.

Dessa forma podemos usar o resultado do mapeamento da chave como índice em um arranjo de tamanho $B - A$.

Projete uma função que faça o mapeamento de uma chave usando esse esquema.

```
def mapeia(chave: int, A: int, B: int) -> int:
    '''
    Mapeia uma chave no intervalo de
    *A* a *B* para um índice de um arranjo
    com *(B - A)* elementos.
    Requer que A <= chave < B.

    Exemplos
    >>> mapeia(-5, -5, 20)
    0
    >>> mapeia(19, -5, 20)
    24
    >>> mapeia(6, -5, 20)
    11
    '''
    assert A <= chave < B
    return chave - A
```

Quantidade de chaves menor que o tamanho do intervalo

O que fazer quando a quantidade de chaves armazenadas n é muito menor que a quantidade de chaves possíveis U?

Usar um arranjo de tamanho $m = O(n)$ e *mapear* as chaves para índices no intervalo de $[0, m)$ (índice válido para o arranjo).

Quantidade de chaves menor que o tamanho do intervalo

Como mapear uma chave no intervalo de $[0, U)$ para posições no intervalo $[0, m)$?

Algumas opções (sendo k uma chave):

- Por divisão (resto): $k \mod m$
- Por multiplicação: $\lfloor m \times (k \times A \mod 1) \rfloor$, onde $A > 1$ é um valor real – note que $k \times A \mod 1 < 1$.

Quantidade de chaves menor que o tamanho do intervalo

Mapeie as chaves 734, 141, 8, 230, 554, 650 usando o esquema de divisão com $m = 20$.

$734 \longrightarrow 14$, $141 \longrightarrow 1$, $8 \longrightarrow 8$, $230 \longrightarrow 10$, $554 \longrightarrow 14$, $650 \longrightarrow 10$.

Considerando que o resultado do mapeamento de uma chave é uma posição em um arranjo (onde o valor associado com a chave será armazenado), qual é o problema que temos? Colisões!

Uma **colisão** ocorre quando duas chaves são mapeadas para a mesma posição do arranjo.

Podemos evitar as colisões? Sem conhecer as chaves, não.

Podemos lidar com as colisões? Sim, de algumas maneiras que vamos ver depois.

Considerando o mapeamento por divisão, qual é a característica das chaves para que as colisões sejam mais raras? Elas devem estar uniformemente distribuídas.

E para que as colisões sejam frequentes? Que tenham o mesmo resto quando divididas por m.

Chaves que não são inteiros

O que fazer quando as chaves não são inteiros?

Mapear as chaves para valores inteiros e depois para posições. (Ou diretamente para posições)

Como mapear uma string para um inteiro?

Chaves que não são inteiros

Cada elemento em uma posição de uma string é internamente representado por um número (*code point*), esse número pode ser obtido com a função `ord`.

```
>>> ord('a')
97
```

```
>>> ord('z')
122
```

```
>>> ord('7')
55
```

```
>>> ord('%')
37
```

Então, podemos, por exemplo, mapear uma string para o *code point* do seu primeiro caractere, ou zero se a string for vazia. Ou ainda, somar todos os *code point* de todos os caracteres.

Qual o problema dessas formas de mapeamento? Geram muitas colisões!

Mas não vamos nos preocupar com isso por enquanto, basta sabermos que é possível mapear *qualquer* tipo de valor para um número inteiro.

Vimos que, se as chaves são inteiros em um intervalo de 0 a $M - 1$, então podemos implementar um dicionário usando endereçamento direto, onde as operações de busca, inserção e remoção tem complexidade de tempo de $O(1)$.

Vimos as limitações do endereçamento direto e discutimos estratégias de como superá-las. O que essas estratégias tinham em comum?

- O mapeamento da chave para uma posição de um arranjo com tamanho conhecido

Em outras palavras, a estratégia é a mesma!

Chamamos a função que mapeia as chaves para posições de um arranjo de **função de dispersão** ou **função hash**.

Uma **tabela de dispersão** ou **tabela hash** é uma estrutura de dados que usa uma função de dispersão para calcular índices em um arranjo que fornece uma forma de armazenar pares de chave-valor.

Existem dois desafios no projeto e implementação de uma tabela de dispersão:

- A função de dispersão
- O tratamento de colisões

Criar uma boa função de dispersão, isto é, uma função que gere poucas colisões, requer conhecimentos avançados de probabilidade e estatística, por isso não vamos tratar desse assunto.

Como função de dispersão, vamos combinar a função `hash`, pré-definida em Python, com o resto da divisão. Para uma chave k, vamos representar o resultado da função de dispersão por $h(k)$.

```
>>> hash('casa')
-3155579165809741514
>>> hash('arroz')
-5974344979373615551
>>> hash(7)
7
>>> hash(-17)
-17
>>> hash(2 ** 100)
549755813888
```

```
>>> hash('casa') % 20
6
>>> hash('arroz') % 20
9
>>> hash(7) % 20
7
>>> hash(-17) % 20
3
>>> hash(2 ** 100) % 20
8
```

Considere os pares de chave-valor: `(734, 'maça')`, `(141, 'mamão')`, `(84, 'banana')`, `(236, 'goiaba')`, `(554, 'ameixa')`, `(1, 'laranja')`.

Considerando um tabela (arranjo) de $m = 10$ posições, calcule $h(k) = k \mod m$ para cada chave k listada anteriormente.

Proponha uma forma de lidar com as colisões, isto é, uma maneira de armazenar, buscar, inserir e remover os pares chave-valor na tabela.

Encadeamento separado

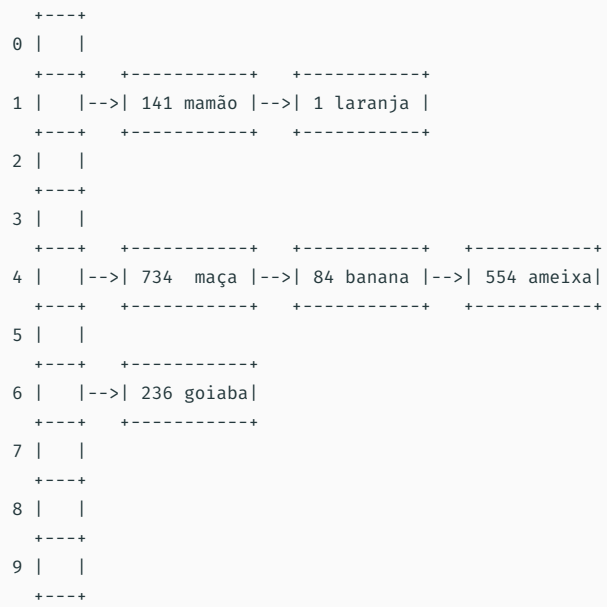
Podemos armazenar todos os pares chave-valor cuja chave gerou o mesmo índice em um coleção:

- Arranjo dinâmico
- Lista encadeada
- Árvore AVL
- Outra tabela de dispersão!

Quando usamos uma lista encadeada em cada posição, chamamos a estratégia **encadeamento separado**.

Encadeamento separado

```
(734, 'maça') -> 4

(141, 'mamão') -> 1

(84, 'banana') -> 4

(236, 'goiaba') -> 6

(554, 'ameixa') -> 4

(1, 'laranja') -> 1
```



Encadeamento separado

Como definir os tipos para implementar um dicionário usando uma tabela de dispersão com encadeamento?

```
@dataclass
class No:
    chave: str
    valor: int
    prox: No | None

class Dicionario:
    tabela: list[No | None]
    num_itens: int
```

Como implementar o método `busca`?

```
def busca(self, chave: str) -> int | None:
    # procurar por chave em self.tabela[h(chave)]
```

Como implementar `associa`?

```
def associa(self, chave: str, valor: int):
    # inserir (chave, valor) em self.tabela[h(chave)]
    # ou atualizar o valor associado com a chave
```

Como implementar `remove`?

```
def remove(self, chave: str):
    # remover (chave, valor) de self.tabela[h(chave)]
```

Qual é a complexidade de tempo de `busca`, `associa` e `remove`? Depende da quantidade de itens no encadeamento...

Para discutirmos a complexidade de tempo, precisamos de uma definição.

Chamamos de **fator de carga** α de uma tabela de dispersão T o valor n/m, onde m é a quantidade de posições na tabela e n é a quantidade de elementos em T.

Qual é o pior caso para as operações? Todos os n elementos estão na mesma posição da tabela. Nesse caso, o tempo das operações é $O(n)$.

E o caso médio? Qual é o tamanho médio de cada lista encadeada? $n/m = \alpha$, ou seja, no caso médio, o tempo das operações é $O(1 + \alpha)$.

Se mantivermos $n = O(m)$, então $\alpha = n/m = O(m)/m = O(1)$, e o tempo médio das operações fica $O(1)$.

Para manter o tempo médio em $O(1)$, temos que manter um fator de carga pequeno. Mas não muito pequeno para não desperdiçar memória.

Sedgewick recomenda um valor entre 5 e 10.

Então, quando α fica maior que 10, temos que alocar uma tabela *maior* e fazer a redispersão das chaves.

Quando α fica menor que 5, temos que alocar uma tabela *menor* e fazer a redispersão das chaves.

Endereçamento aberto é uma técnica de resolução de colisão baseado em **sondagem**.

Nessa técnica, todos os pares chave-valor são armazenados na própria tabela.

Quando um novo par chave-valor precisa ser inserido na tabela e a posição já está ocupada, outras posições são sondadas até que uma posição livre seja encontra.

A busca e a remoção devem usar o mesmo processo de sondagem.

A forma mais simples de sondagem é a linear. Nesse esquema, quando há colisão na posição i, as posições são testadas na ordem $(i + j) \mod m$ para $j = 1, 2, \ldots, ...m$.

A sondagem para quando uma posição que nunca foi ocupada é encontrada.

Veremos que para esse esquema funcionar, a remoção deve marcar a posição de forma especial.

Sondagem linear - inserção

Mostre passo a passo a inserção das chaves 734, 84, 236, 554, 141 em uma tabela com $m = 8$.

$734 \longrightarrow 6$

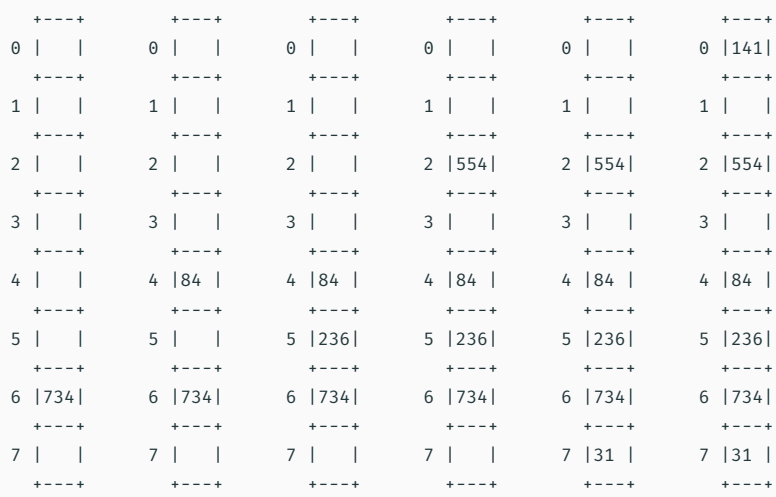
$84 \longrightarrow 4$

$236 \longrightarrow 4, 5$

$554 \longrightarrow 2$

$31 \longrightarrow 7$

$141 \longrightarrow 5, 6, 7, 0$



Mostre passo a passo para a remoção da chave 236, e a busca das chaves 742 e 141?.

```
  +---+
0 |141|
  +---+
1 |   |
  +---+
2 |554|
  +---+
3 |   |
  +---+
4 |84 |
  +---+
5 |236|
  +---+
6 |734|
  +---+
7 |31 |
  +---+
```

Remoção do $236 \longrightarrow 4, 5$.

A posição de remoção deve ser marcada de forma especial.

```
  +---+
0 |141|
  +---+
1 |   |
  +---+
2 |554|
  +---+
3 |   |
  +---+
4 |84 |
  +---+
5 | \ |
  +---+
6 |734|
  +---+
7 |31 |
  +---+
```

Busca do $742 \longrightarrow 6, 7, 0, 1$.

Não encontrado.

Busca do $141 \longrightarrow 5, 6, 7, 0$.

Encontrado.

Defina os tipos de dados para um dicionário implementado usando tabelas de dispersão com sondagem.

```
@dataclass
class Removido:
    pass

@dataclass
class Presente:
    chave: str
    valor: int

class Dicionario:
    tabela: list[None | Removido | Presente]
    # Qtd de itens Presente na tabela.
    num_itens: int
    # Qtd de itens Removido na tabela.
    num_removidos: int
```

Implemente o método `Dicionario.busca`.

```
def busca(self, chave: str) -> None | int:
    p = hash(chave) % len(self.tabela)
    while self.tabela[p] is not None:
        if isinstance(self.tabela[p], Presente):
            if self.tabela[p].chave == chave:
                return self.tabela[p].valor
        p = (p + 1) % len(self.tabela)
    return None
```

Note que para a busca parar no caso em que a chave não é encontrada é preciso que exista pelo menos uma posição com `None`, ou seja, a quantidade de itens presentes mais os removidos deve ser menor que o tamanho da tabela.

Qual é o tempo de execução das operações de busca, inserção e remoção?

No pior caso, $O(n)$.

Mas se o fator de carga for mantido menor do que 0.7, a complexidade de tempo no caso médio é $O(1)$.

Referências

Capítulo 11 - Seção Estratégias de hashing - Fundamentos de Python: Estruturas de dados. Kenneth A. Lambert. (Disponível na Minha Biblioteca na UEM).

Capítulo 11 - Tabelas de Dispersão - Algoritmos: Teoria e Prática, 3a. edição, Cormen, T. et al.

Capítulo 5 - Hash Tables - Open Data Structures.

Funções `hash` e `object.__hash__` do Python.