

Estruturas de dados lineares

Alocação encadeada

Estruturas de Dados

Marco A L Barbosa

malbarbo.pro.br

Departamento de Informática

Universidade Estadual de Maringá



Este trabalho está licenciado com uma Licença Creative Commons - Atribuição-Compartilhagual 4.0 Internacional.

<http://github.com/malbarbo/na-ed>

Como podemos implementar os TADs Pilha, Fila, Fila Dupla e Lista sem usar arranjos?

Como podemos representar uma quantidade arbitrária de dados sem arranjos?

É isso que vamos ver agora!

Mas antes, vamos falar de valores opcionais.

Queremos representar uma pessoa com um nome e uma idade, sendo que a idade é opcional. Também queremos fazer uma função `faz_aniversario` que aumenta a idade de uma pessoa, se a idade estiver presente, em 1 ano.

```
@dataclass
class Pessoa:
    nome: str
    idade: int
```

Como representar a ausência da idade? Uma opção é usar um valor inválido para a idade.

```
>>> NENHUMA = -1
>>> p1 = Pessoa('Joao', 21)
>>> p2 = Pessoa('Maria', NENHUMA)
>>> p1
Pessoa(nome='Joao', idade=21)
>>> p2
Pessoa(nome='Maria', idade=-1)
```

Agora temos que projetar a função `faz_aniversario`.

```
def faz_aniversario(p: Pessoa):  
    ...  
  
    Aumenta a idade da pessoa *p* em  
    1 ano se a idade está presente.  
  
    Exemplos  
>>> p1 = Pessoa('Joao', 21)  
>>> faz_aniversario(p1)  
>>> p1  
Pessoa(nome='Joao', idade=22)  
>>> p2 = Pessoa('Maria', NENHUMA)  
>>> faz_aniversario(p2)  
>>> p2  
Pessoa(nome='Maria', idade=-1)  
...  
  
if p.idade != NENHUMA:  
    p.idade += 1
```

Qual é o problema em usar **NENHUMA** para representar a ausência de idade?

Sempre que precisamos da idade, temos que fazer uma verificação. O que acontece se esquecermos de fazer a verificação? No melhor dos casos, descobrimos o erro na fase de teste, no pior caso, o programa geraria resultados incorretos para o usuário.

Note que se a idade é opcional, sempre precisamos verificar se ele está presente ou não, a questão é como fazemos isso.

O que permite ao programa executar sem verificar se a idade está presente?

O ponto é que estamos usando um valor do mesmo tipo para representar a ausência de valor, então qualquer operação válida para os valores do tipo também é válida para o valor que representa a ausência de valor!

Existe mais algum problema com essa estratégia?

Sim, o leitor vê a definição `idade: int` e supõe que a idade é requerida, só entendendo que é opcional se isso estiver escrito como comentário.

Podemos fazer melhor? Sim!

Em Python existe um valor especial chamado **None** (do tipo **None** – sim, o tipo e o valor do tipo têm o mesmo nome!), que fica armazenado em uma célula de memória específica, que é usado para representar a ausência de um valor.

Para que uma variável possa referenciar o valor **None**, é preciso informar isso na declaração do tipo da variável, por exemplo **a: int | None**. Esta declaração está dizendo que a variável **a** pode referenciar uma célula com um inteiro ou com **None**.

```
>>> # a pode referenciar um inteiro ou None
>>> a: int | None = 20
>>> a
20
>>> a is None
False
>>> a is not None
True
```

```
>>> a = None
>>> a
>>> # nada é exibido, None representa nada!
>>> a is None
True
>>> a is not None
False
```

Note que é possível declarar uma variável apenas do tipo **None**, por exemplo **a: None**, mas isso não faz muito sentido pois o único valor válido para **a** seria **None**!

```
>>> # a só pode referenciar o valor None!  
>>> a: None = None  
>>> a
```

Como o uso do **None** muda o código?

```
@dataclass
```

```
class Pessoa:
```

```
    nome: str
```

```
    idade: int | None
```

A intenção está clara, **idade** pode ser um inteiro ou **None**.

```
>>> p1 = Pessoa('Joao', 21)
```

```
>>> faz_aniversario(p1)
```

```
>>> p1
```

```
Pessoa(nome='Joao', idade=22)
```

```
>>> p2 = Pessoa('Maria', None)
```

```
>>> faz_aniversario(p2)
```

```
>>> p2
```

```
Pessoa(nome='Maria', idade=None)
```

Os exemplos também ficam mais claros.


```
def faz_aniversario(p: Pessoa):  
    if p.idade is not None:  
        p.idade += 1
```

O que aconteceria se esquecêssemos de fazer a verificação se a idade está presente?

O **python** geraria um erro de execução:

```
TypeError: unsupported operand type(s) for +=: 'NoneType' and 'int'
```

O **mypy** iria gerar um erro:

```
pessoa.py:23: error: Unsupported operand types for + ("None" and "int") [operator]  
pessoa.py:23: note: Left operand is of type "int | None"  
Found 1 error in 1 file (checked 1 source file)
```

O que ganhamos com isso?

Antes era possível que o programa continuasse a execução mesmo se a verificação da idade, agora isso não é mais possível!

Além disso, com o uso do `mypy`, podemos detectar o erro estaticamente, sem precisar executar o programa.

Vamos voltar a uma das questões iniciais.

Como podemos representar uma quantidade arbitrária de dados sem arranjos?

Suponha que queremos representar uma coleção de nomes de pessoas. Podemos fazer isso usando estruturas. A ideia é criar um **encadeamento** de instância de estruturas.

A estrutura tem um nome de uma pessoa e uma referência para outra instância da mesma estrutura, que contém o nome da próxima pessoa e uma referência para outra instância da mesma estrutura...

```
from __future__ import annotations
```

```
@dataclass
```

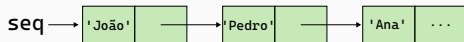
```
class Seq:
```

```
    nome: str
```

```
    proximo: Seq
```

Como representar a coleção com os nomes “Joao”, “Pedro” e “Ana”?

```
seq = Seq('Joao', Seq('Pedro', Seq('Ana', ...)))
```

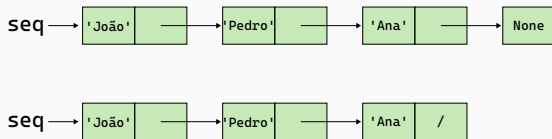


O que está faltando? Uma forma de encerrar a sequência! Vamos tornar o próximo opcional usando **None**.

Encadeamento

```
@dataclass
class Seq:
    nome: str
    proximo: Seq | None

>>> seq = Seq('Joao', Seq('Pedro', Seq('Ana', None)))
```



Note que na representação gráfica podemos utilizar `/` para indicar uma referência para `None`.

O que tem de diferente na declaração de `Seq` em relação às classes que definimos anteriormente? Uma **autorreferência**, ou seja, a utilização da classe em sua própria definição.

Os tipos com autorreferência (ou recursivos) permitem a representação de uma quantidade de dados arbitrária pelo **encadeamento** de instâncias do tipo. Usamos **None** para representar o fim do encadeamento.

O tipo utilizado no encadeamento é comumente chamado de **Nó**, dessa forma, usamos um encadeamento de nós para criar uma coleção de valores.

```
@dataclass
class No:
    item: int
    prox: No | None

>>> p = No('Joao', No('Pedro', No('Ana', None)))
```

Antes de prosseguirmos, vamos revisar o uso de múltiplas referências para a mesma célula de memória.

Vimos que em Python toda variável referencia uma célula de memória. Em algumas situações, como quando atribuímos uma variável para outra ou passamos uma variável como parâmetro, temos mais de uma variável referenciando a mesma célula de memória.

Essa situação pode gerar algumas dificuldades para a escrita e entendimento do código, mas é necessária para manipulação de encadeamentos.

Vamos usar o [Python Tutor](#) para visualizar algumas situações de múltiplas referências.

O Python Tutor não aceita o uso de `@dataclass`, então vamos definir uma classe “normal” e definir um construtor manualmente.

```
@dataclass
```

```
class Ponto:
```

```
    x: int
```

```
    y: int
```

```
@dataclass
```

```
class Retangulo:
```

```
    canto: Ponto
```

```
    largura: int
```

```
    altura: int
```

```
class Ponto:
```

```
    def __init__(self, x: int, y: int):
```

```
        self.x = x
```

```
        self.y = y
```

```
class Retangulo:
```

```
    def __init__(self, canto: Ponto,  
                  largura: int,  
                  altura: int):
```

```
        self.canto = canto
```

```
        self.largura = largura
```

```
        self.altura = altura
```

Acesse esses exemplos no [Python Tutor](#).

Múltiplas referências

```
class Ponto:
    def __init__(self, x: int, y: int):
        self.x = x
        self.y = y
```

```
class Retangulo:
    def __init__(self, canto: Ponto,
                  largura: int,
                  altura: int):
        self.canto = canto
        self.largura = largura
        self.altura = altura
```

```
p = Ponto(10, 50)
l = 200
a = 450
```

```
r1 = Retangulo(p, l, a)
r2 = Retangulo(p, l, a)
```

```
# Quais valores serão exibidos?
l = 300
print(r1.largura)
print(r2.largura)
# Quais valores serão exibidos?
p.x = 20
print(r1.canto.x, r1.canto.y)
print(r2.canto.x, r2.canto.y)
# Quais valores serão exibidos?
r1.canto.y = 70
print(p.x, p.y)
print(r2.canto.x, r2.canto.y)
# Quais valores serão exibidos?
r2.canto = Ponto(3, 17)
print(p.x, p.y)
print(r1.canto.x, r1.canto.y)
```

Manipulação de encadeamento

```
@dataclass
```

```
class No:
```

```
    item: int
```

```
    prox: No | None
```

Defina uma variável `p` com um encadeamento de nós com os valores 10, 4, 1.

```
>>> p = No(10, No(4, No(1, None)))
```

Escreva expressões para acessar o primeiro, o segundo e o terceiro item do encadeamento.

```
>>> p.item
```

```
10
```

```
>>> p.prox.item
```

```
4
```

```
>>> p.prox.prox.item
```

```
1
```

Modifique o segundo item para 7.

```
>>> p.prox.item = 7
```

Adicione um `No` com o item 2 no início.

```
>>> p = No(2, p)
```

Adicione um `No` com o item 20 no final.

```
>>> p.prox.prox.prox.prox = No(20, None)
```

Usando repetição!

```
>>> # q começa no início do encadeamento
```

```
>>> q = p
```

```
>>> # avançamos q enquanto podemos
```

```
>>> while q.prox is not None:
```

```
...     q = q.prox
```

```
>>> # agora q referencia o último nó
```

```
>>> q.prox = No(20, None)
```

Implementação de pilha

Como podemos implementar uma pilha usando um encadeamento de nós?

Usamos uma variável **topo** para armazenar o primeiro nó do encadeamento ou **None** se a pilha estiver vazia:

- Construtor: inicializa **topo** com **None**
- Vazia: verifica se **topo** é **None**
- Empilha: insere um novo nó com o item no início do encadeamento e muda **topo** para o novo início
- Desempilha: remove o primeiro nó do encadeamento e muda **topo** para o novo início

```
class Pilha:
    topo: No | None

    def empilha(self, item: str):
        self.topo = No(item, self.topo)

    def desempilha(self) -> str:
        if self.topo is None:
            raise ValueError('pilha vazia')
        item = self.topo.item
        self.topo = self.topo.prox
        return item
```

Qual a complexidade de tempo de **empilha** e **desempilha**? $O(1)$.

Implementação de Fila

Como podemos implementar uma fila usando um encadeamento de nós?

Usamos uma variável `inicio` para armazenar o primeiro nó do encadeamento ou `None` se a fila estiver vazia:

- Construtor: inicializa `inicio` com `None`
- Vazia: verifica se `inicio` é `None`
- Enfileira: insere um novo nó com o item no final do encadeamento
- Desenfileira: remove o primeiro nó do encadeamento e muda `inicio` para o novo início

```
class Fila:
    inicio: No | None

    def enfileira(self, item: str):
        if self.inicio is None:
            self.inicio = No(item, None)
        else:
            # Encontra o último nó
            p = self.inicio
            while p.prox is not None:
                p = p.prox
            # Coloca item após o último nó
            p.prox = No(item, None)

    def desenfileira(self) -> str:
        if self.inicio is None:
            raise ValueError('fila vazia')
        item = self.inicio.item
        self.inicio = self.inicio.prox
        return item
```

Implementação de Fila

```
class Fila:
    inicio: No | None

    def enfileira(self, item: str):
        if self.inicio is None:
            self.inicio = No(item, None)
        else:
            # Encontra o último nó
            p = self.inicio
            while p.prox is not None:
                p = p.prox
            # Coloca item após o último nó
            p.prox = No(item, None)

    def desenfileira(self) -> str:
        if self.inicio is None:
            raise ValueError('fila vazia')
        item = self.inicio.item
        self.inicio = self.inicio.prox
        return item
```

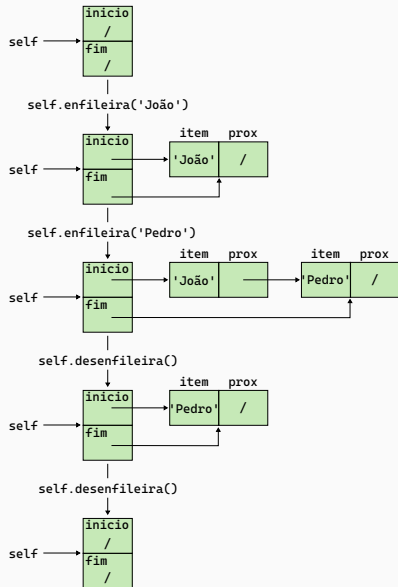
Qual a complexidade de tempo de **desenfileira**? $O(1)$.

Qual a complexidade de tempo de **enfileira**? $O(n)$...

Podemos fazer melhor? Sim!

Vamos manter uma variável **fim** que referencia o último nó do encadeamento ou é **None** se a fila estiver vazia. Isso permite acessar o fim em tempo constante. Ambos **inicio** e **fim** são considerados em **enfileira** e **desenfileira**.

Implementação de Fila



```
class Fila:
```

```
    inicio: No | None
```

```
    fim: No | None
```

```
    def enfileira(self, item: str):
```

```
        if self.fim is None:
```

```
            self.inicio = No(item, None)
```

```
            self.fim = self.inicio
```

```
        else:
```

```
            self.fim.prox = No(item, None)
```

```
            self.fim = self.fim.prox
```

```
    def desenfileira(self) -> str:
```

```
        if self.inicio is None:
```

```
            raise ValueError('fila vazia')
```

```
        item = self.inicio.item
```

```
        self.inicio = self.inicio.prox
```

```
        if self.inicio is None:
```

```
            self.fim = None
```

```
        return item
```

```
class Fila:
    inicio: No | None
    fim: No | None

    def enfileira(self, item: str):
        if self.fim is None:
            self.inicio = No(item, None)
            self.fim = self.inicio
        else:
            self.fim.prox = No(item, None)
            self.fim = self.fim.prox

    def desenfileira(self) -> str:
        if self.inicio is None:
            raise ValueError('fila vazia')
        item = self.inicio.item
        self.inicio = self.inicio.prox
        if self.inicio is None:
            self.fim = None
        return item
```

Qual a complexidade de tempo de desenfileira? $O(1)$.

Qual a complexidade de tempo de enfileira? $O(1)$.

Implementação de Fila Dupla

Como podemos implementar uma fila dupla usando um encadeamento de nós?

Precisamos implementar inserção e remoção nos dois extremos.

Mantendo `inicio` e `fim`, quais são as complexidades de tempos das operações?

Inserir no início: $O(1)$ (como `Pilha.empilha` – atualiza `fim` se necessário)

Remover do início: $O(1)$ (como `Fila.desenfileira`)

Inserir no fim: $O(1)$ (como `Fila.enfileira`)

Remover do fim: $O(n)$! É preciso localizar, a partir do início, o predecessor do fim no encadeamento.

```
def remove_fim(self) -> str:
    if self.fim is None:
        raise ValueError('fila vazia')

    # Salva o último elemento
    item = self.fim.item

    p = self.inicio
    assert p is not None
    if p.prox is None: # Único elemento?
        self.inicio = None
        self.fim = None
    else:
        # Encontra o penúltimo
        while p.prox is not self.fim:
            p = p.prox
        p.prox = None
        self.fim = p
    # Devolve o item
    return item
```


Podemos fazer melhor? Ou seja, podemos fazer uma implementação em que a remoção do fim seja constante? Sim!

Precisamos de um encadeamento duplo. Cada nó mantém, além de uma referência opcional para o próximo, uma referência opcional para o nó anterior no encadeamento. Dessa forma é possível encontrar o antecessor de um nó em tempo constante.

```
@dataclass
class No:
    ante: No | None
    item: str
    prox: No | None
```

Encadeamento duplo

Trabalhar com encadeamento duplo requer ainda mais cuidado do que com encadeamento simples! Por isso é importante **fazer desenhos!**

Escreva o código para criar o seguinte encadeamento



```
>>> a = No(None, 'A', None)
>>> b = No(None, 'B', None)
>>> c = No(None, 'C', None)
>>> a.prox = b
>>> b.ante = a
>>> b.prox = c
>>> c.prev = b
>>> p = a
```

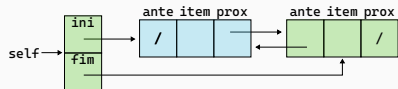
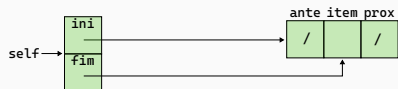
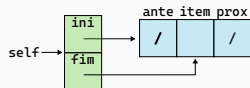
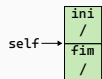
Note que, como o encadeamento tem ciclos, ele não pode ser criado todo de uma vez. A estratégia que usamos foi criar os nós separados e depois ligá-los.

Na hora de exibir um encadeamento com ciclos, o Python usa ... para evitar exibir o mesmo nó mais que uma vez.

```
>>> p
No(ante=None, item='A', prox=No(ante=..., item='B', prox=No(ante=..., item='C', prox=None)))
>>> b
No(ante=No(ante=None, item='A', prox=...), item='B', prox=No(ante=..., item='C', prox=None))
>>> c
No(ante=No(ante=No(ante=None, item='A', prox=...), item='B', prox=...), item='C', prox=None)
```

Agora vamos implementar uma fila dupla usando encadeamento duplo e mantendo referências para o início e fim do encadeamento.

Fila dupla - Inserção e remoção no início (versão didática)

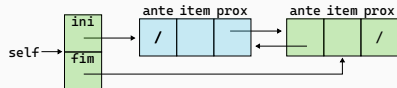
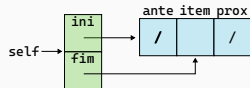
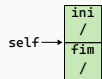


O nó azul está sendo inserido/removido.

```
def insere_inicio(self, item: str):  
    if self.inicio is None:  
        self.inicio = No(None, item, None)  
        self.fim = self.inicio  
    else:  
        self.inicio.ante = No(None, item, self.inicio)  
        self.inicio = self.inicio.ante
```

```
def remove_inicio(self) -> str:  
    if self.inicio is None:  
        raise ValueError('fila vazia')  
    item = self.inicio.item  
    # Só tem um nó?  
    if self.inicio.prox is None:  
        self.inicio = None  
        self.fim = None  
    else:  
        self.inicio = self.inicio.prox  
        self.inicio.ante = None  
    return item
```

Fila dupla - Inserção e remoção no início (versão direta)



O nó azul está sendo inserido/removido.

```
def insere_inicio(self, item: str):  
    self.inicio = No(None, item, self.inicio)  
    if self.inicio.prox is None:  
        self.fim = self.inicio  
    else:  
        self.inicio.prox.ante = self.inicio
```

```
def remove_inicio(self) -> str:  
    if self.inicio is None:  
        raise ValueError('fila vazia')
```

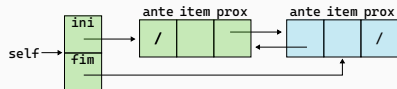
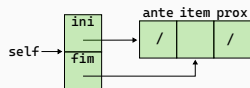
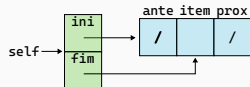
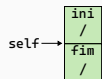
```
    item = self.inicio.item
```

```
    self.inicio = self.inicio.prox  
    if self.inicio is None:  
        self.fim = None
```

```
    else:  
        self.inicio.ante = None
```

```
    return item
```

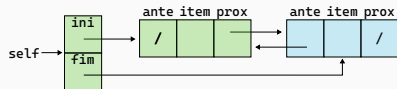
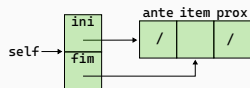
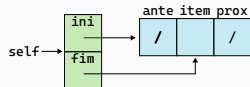
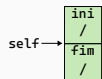
Fila dupla - Inserção e remoção no fim (versão didática)



O nó azul está sendo inserido/removido.

```
def insere_fim(self, item: str):  
    if self.fim is None:  
        self.inicio = No(None, item, None)  
        self.fim = self.inicio  
    else:  
        self.fim.prox = No(self.fim, item, None)  
        self.fim = self.fim.prox  
  
def remove_fim(self) -> str:  
    if self.fim is None:  
        raise ValueError('fila vazia')  
    item = self.fim.item  
    # Só tem um nó?  
    if self.fim.ante is None:  
        self.inicio = None  
        self.fim = None  
    else:  
        self.fim = self.fim.ante  
        self.fim.prox = None  
    return item
```

Fila dupla - Inserção e remoção no fim (versão direta)



O nó azul está sendo inserido/removido.

```
def insere_fim(self, item: str):  
    self.fim = No(self.fim, item, None)  
    if self.fim.ante is None:  
        self.inicio = self.fim  
    else:  
        self.fim.ante.prox = self.fim
```

```
def remove_fim(self) -> str:  
    if self.fim is None:  
        raise ValueError('fila vazia')
```

```
    item = self.fim.item
```

```
    self.fim = self.fim.ante
```

```
    if self.fim is None:  
        self.inicio = None
```

```
    else:  
        self.fim.prox = None
```

```
    return item
```

Com encadeamento duplo e referência para início e fim, os métodos do TAD de fila dupla têm complexidade de tempo de $O(1)$.

No entanto, a implementação parece complicada, cada um dos quatro métodos tem dois casos distintos.

Podemos simplificar o código? O que faz com que sejam necessários dois casos?

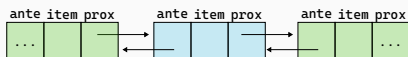
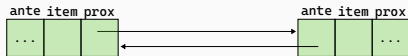
Vamos supor por um momento que todos os nós tenham antecessor e sucessor.

Como remover um nó **p** sabendo que existe um antecessor e um sucessor de **p**?

Como inserir um nó **novo** após um nó **p** sabendo que **p** tem um sucessor?

Como inserir um nó **novo** antes de um nó **p** sabendo que **p** tem um antecessor?

Fila dupla



```
# p é o nó azul
```

```
def remove(p: No):  
    p.prox.ante = p.ante  
    p.ante.prox = p.prox
```

```
# p é o nó mais a esquerda
```

```
# novo é o nó azul
```

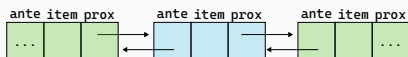
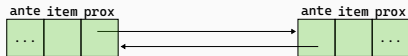
```
def insere_depois(p: No, novo: No):  
    novo.ante = p  
    novo.prox = p.prox  
    p.prox.ante = novo  
    p.prox = novo
```

```
# p é o nó mais a direita
```

```
# novo é o nó azul
```

```
def insere_antes(p: No, novo: No):  
    novo.ante = p.ante  
    novo.prox = p  
    p.ante.prox = novo  
    p.ante = novo
```

Fila dupla



Não precisamos de dois métodos para inserir!

```
def insere_antes(p: No, novo: No):  
    insere_depois(p.ante, novo)
```

```
# p é o nó azul
```

```
def remove(p: No):  
    p.prox.ante = p.ante  
    p.ante.prox = p.prox
```

```
# p é o nó mais a esquerda
```

```
# novo é o nó azul
```

```
def insere_depois(p: No, novo: No):  
    novo.ante = p  
    novo.prox = p.prox  
    p.prox.ante = novo  
    p.prox = novo
```

```
# p é o nó mais a direita
```

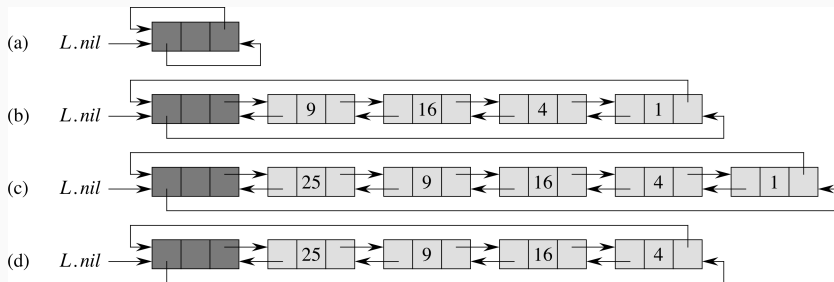
```
# novo é o nó azul
```

```
def insere_antes(p: No, novo: No):  
    novo.ante = p.ante  
    novo.prox = p  
    p.ante.prox = novo  
    p.ante = novo
```

Como podemos fazer para que cada nó tenha um antecessor e um sucessor?

Usamos uma **sentinela**, um nó especial, que é usado onde o valor **None** seria usado normalmente. Ou seja, a sentinela fica entre o primeiro e o último nó do encadeamento.

O resultado é comumente chamado de **lista circular duplamente encadeada com sentinela**! Na figura abaixo L é o **self** e a sentinela é o **nil**.



Como implementar o TAD de fila dupla com esse esquema?

Nesse esquema o **ante** e o **prox** não podem ser **None**, então precisamos mudar a definição de **No**:

```
@dataclass
class No:
    ante: No
    item: str
    prox: No
    def __init__(self, item: str) -> None:
        # Após a criação de um nó temos a
        # responsabilidade de alterar ante e
        # prox para valores válidos!
        self.ante = None # type: ignore
        self.item = item
        self.prox = None # type: ignore
```

Mas isso cria um problema, que é a impossibilidade de instanciar um **No**! Conforme discutimos em sala, vamos usar uma inicialização em duas etapas, na primeira um **No** é criado com valores temporários **None** para **ante** e **prox** (usamos **# type: ignore** para que o **mypy** não indique o erro) e depois mudamos para os valores corretos.

```
class FilaDupla:
    sentinela: No
    def __init__(self) -> None:
        self.sentinela = No('')
        self.sentinela.ante = self.sentinela
        self.sentinela.prox = self.sentinela
```

Fila Dupla com sentinela

```
def remove(p: No) -> str:
    '''Remove *p* do seu encademaneto
    e devolve o item em *p*.'''
    p.prox.ante = p.ante
    p.ante.prox = p.prox
    return p.item

def insere_depois(p: No, novo: No):
    '''Insere *novo* após *p* no
    encademaneto.'''
    novo.ante = p
    novo.prox = p.prox
    p.prox.ante = novo
    p.prox = novo
```

Tendo as funções auxiliares de inserção e remoção de um nó, como podemos implementar inserção e remoção do início e fim de uma fila com sentinela?

```
class FilaDupla:
    sentinela: No
    def __init__(self) -> None:
        self.sentinela = No('')
        self.sentinela.ante = self.sentinela
        self.sentinela.prox = self.sentinela
    def vazia(self) -> bool:
        return self.sentinela.prox is self.sentinela
    def insere_inicio(self, item: str):
        insere_depois(self.sentinela, No(item))
    def remove_inicio(self) -> str:
        assert not self.vazia()
        return remove(self.sentinela.prox)
    def insere_fim(self, item: str):
        insere_depois(self.sentinela.ante, No(item))
    def remove_fim(self) -> str:
        assert not self.vazia()
        return remove(self.sentinela.ante)
```

Como implementar o TAD Lista utilizando encadeamento?

Devemos usar encadeamento simples ou duplo para implementar o TAD Lista?

Se o TAD Lista não define função específica para remoção do fim, então o encadeamento simples é suficiente.

Qual o tempo de execução para operações de inserção e remoção em posição? $O(n)$, pois é preciso seguir o encadeamento até a posição especificada, que pode ser a última.

A implementação do TAD Lista fica como exercício!

Vimos quatro TADs e como implementá-los usando arranjos (alocação contígua) e encadeamento de nós (alocação encadeada)

- Pilha
- Fila
- Fila Dupla
- Lista

Estrutura / Operação	get/set	ins/rem início	ins/rem fim	ins/rem	busca
Encadeamento Simples	$O(n)$	$O(1) / O(1)$	$O(1) / O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
Encadeamento Duplo	$O(n)$	$O(1) / O(1)$	$O(1) / O(1)$	$O(n) - O(1)$ ¹	$O(n)$
Arranjo Dinâmico	$O(1)$	$O(n) / O(n)$	$O(1)^2 / O(1)$	$O(n)$	$O(n)$

¹Com a referência para o nó

²Amortizado

Característica	Contígua	Encadeada
Implementação	Simples	Elaborada
Aumento	Realocação	Criação de nó
Diminuição	Deslocamento / realocação	Remoção de nó
Acesso aleatório	Sim	Não

Capítulo 7, 8, 9 - Pilhas, filas e listas - Fundamentos de Python: Estruturas de dados. Kenneth A. Lambert. (Disponível na [Minha Biblioteca da UEM](#))

Seção 10.2 - Listas ligadas - Algoritmos: Teoria e Prática, 3a. edição, Cormen, T. et al.

Capítulo 3 - Linked Lists - [Open Data Structures](#).