Grafos planares

Marco A L Barbosa
malbarbo.pro.br

Departamento de Informática
Universidade Estadual de Maringá

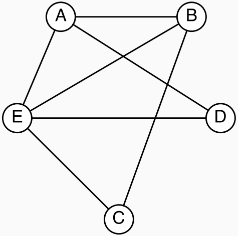
http://github.com/malbarbo/na-grafos

Uma **imersão** de um grafo G em uma superfície S é uma representação geométrica (desenho) de G em S tal que dois vértices distintos não ocupam o mesmo lugar em S e não existe cruzamento de arestas, a não ser nos extremos quando duas arestas são adjacentes.

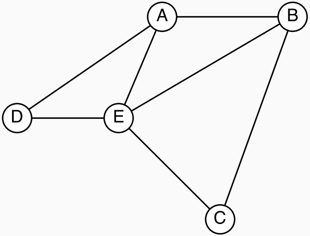
Um grafo G é **planar** se ele tem imersão no plano ($\mathbb{R}^2$)

- As regiões limitadas por uma imersão planar são chamadas de **faces**
- Todo imersão planar têm uma face ilimitada denominada de **face externa**

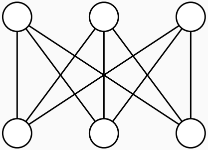
Exemplos



Desenho não planar



Desenho planar



Grafo não planar. Não é possível desenhar este grafo sem cruzamento de arestas

O **grau de uma face** é o tamanho de um caminho mínimo na fronteira da face

```
b ----- d ----- f ------- g
|       |       | 3       |
|   1   |   2   |    i    |  4
|       |       |    |    |
a ----- c ----- e -- h -- j
```

- A fronteira da face 2 tem as arestas *df*, *fe*, *ec*, *de*, então a face 2 tem grau 4
- A fronteira da face 3 tem as arestas *fg*, *gj*, *jh*, *hi*, *he*, *ef*, mas qualquer percurso na fronteira da face 3 deverá passar pela aresta *ih* duas vezes, como por exemplo, *fg*, *gj*, *jh*, *hi*, *ih*, *he*, *ef*. Portanto, o grau da face 3 é 7.

Teorema 1 - Fórmula de Euler

Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com f faces, então $|V| + f = |E| + 2$.

A discussão da prova foi feita em sala. Veja as referências.

Corolário 1

Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com $|V| \geq 3$, então $|E| \leq 3|V| - 6$

Prova

- Seja W a soma dos graus das faces do grafo, temos que $W = 2|E|$. Cada aresta separa duas faces, com exceção das arestas prego (como as arestas *ih* do exemplo anterior), mas neste caso a aresta é contada duas vezes no grau da face
- Cada face tem grau pelo menos 3, portanto $3f \leq W$, como $W = 2|E|$, então $3f \leq 2|E|$
- Substituindo f por $\frac{2|E|}{3}$ na fórmula de Euler, obtemos

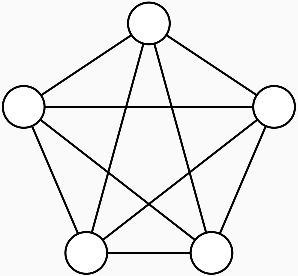
$$|V| + \frac{2|E|}{3} \leq |E| + 2$$

$$3|V| + 2|E| \leq 3|E| + 6$$

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

Propriedades

Podemos usar o Corolário 1 para mostrar que o K_5 é não planar. O K_5 tem 5 vértices e 10 arestas, desta foma $3|V| - 6 = 9$, o que implica que $|E| \leq 3|V| - 6$ é falso. Portanto, o K_5 é não planar.



Corolário 2

Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com $|V| \geq 3$ e sem ciclos de tamanho 3, então $|E| \leq 2|V| - 4$.

Propriedades

Prova

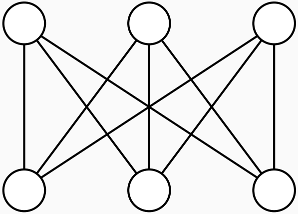
- Semelhante a do corolário 1
- Cada face tem grau pelo menos 4 (não tem ciclos de tamanho 3), portanto, $4f \leq W$, como $W = 2|E|$, então $4f \leq 2|E|$ e $2f \leq |E|$
- Substituindo f por $\frac{|E|}{2}$ na fórmula de Euler, obtemos

$$|V| + \frac{|E|}{2} \leq |E| + 2$$

$$2|V| + |E| \leq 2|E| + 4$$

$$|E| \leq 2|V| - 4$$

O $K_{3,3}$ não tem faces (ciclos) de tamanho 3. Podemos usar o Corolário 2 para mostrar que o $K_{3,3}$ é não planar. O $K_{3,3}$ tem 6 vértices e 9 arestas, desta foma $9 \leq 2 \times 6 - 4 = 8$, o que não é verdade. Portanto, o $K_{3,3}$ é não planar.

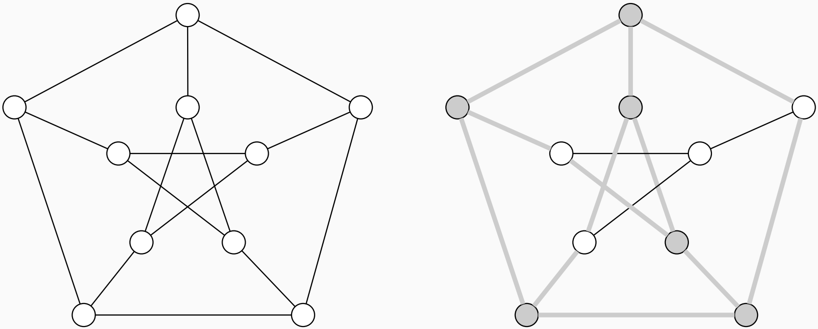


Uma **operação de subdivisão** de uma aresta $e = (u, v)$ é uma substituição de e por um novo vértice w e duas novas arestas (u, w) e (w, v)

Uma **subdivisão** de um grafo G é um grafo H que pode ser obtido a partir de G por uma sequência finita de operações de subdivisão de arestas

Teorema de Kuratowski

Um grafo G é planar se, e somente se, ele não contém uma subdivisão do $K_{3,3}$ e do K_5.



Grafo de Pertersen não é planar porque
contém uma subdivisão do K3,3

Veja esta animação mostrando a subdivisão.

Métodos de teste de planaridade

Dado um grafo $G = (V, E)$, o **problema do teste de planaridade** consiste em determinar se G é planar.

Existem diversos algoritmos com tempo de execução $O(V + E)$

- Algoritmo clássico baseado em adição de caminhos (Hopcroft e Tarjan, 1974)
- Baseado em adição de vértices (Lempel, Even e Cederbaum, 1967, melhorado por Eve e Tarjan, 1976, e Booth e Lueker)
- Baseado em adição de arestas (Boyer e Myrvold, 2004), considerado como estado da arte

Estes algoritmos são bastante elaborados, difíceis de entender e implementar. Para grafos pequenos, podemos testar manualmente se um grafo é planar usando o método heurístico círculo-corda.

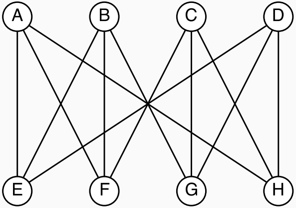
Método círculo-corda para teste de planaridade

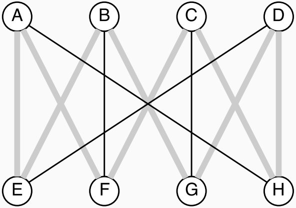
O método círculo-corda consiste em

- Passo 1: Encontrar um ciclo que contém todos os vértices do grafo e desenhá-lo como um círculo
- Passo 2: O restante das arestas que não estão círculo, chamadas de cordas, deve ser desenhadas ou do lado de dentro ou do lado de fora do círculo, de maneira que o desenho seja planar

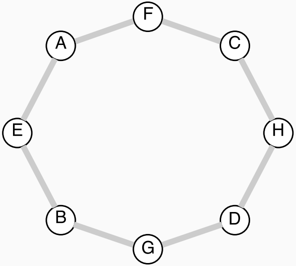
Observe-se que este é um método heurístico, nem todos os grafos planares podem ser desenhados com este método.

Exemplo

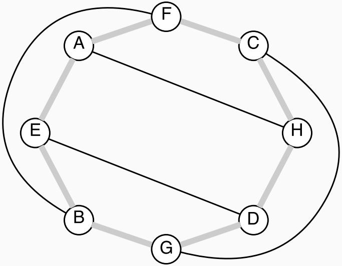




Identificação de um ciclo com todos os vértices



Desenho do ciclo em forma de círculo



Desenho das arestas restantes

Quando um grafo não é planar, uma questão interessante é: o quão longe de ser planar o grafo está?

Algumas medidas de não planaridade

- Número mínimo de cruzamento de arestas para um desenho no plano ($cr(G)$ - o *crossing number* de G)
- Número mínimo de arestas cuja remoção do grafo resulta em um grafo planar ($sk(G)$ - a *skewness* de G)
- Número mínimo de operações de divisões de vértices que obtêm um grafo planar ($sp(G)$ - o *splitting number* de G)

Pela definição destas medidas, podemos observar que $sp(G) \leq sk(G) \leq cr(G)$.

Os problemas de otimização relacionados com o número mínimo de cruzamento, número mínimo de remoção de arestas e número mínimo de divisão de vértices são NP-difícies.

Referências

- Grafos planares. Livro Building Blocks for Theoretical Computer Science. Margaret M. Fleck. Capítulo 21.
- Vídeo Planar Graphs.
- Grafos planares. Wikipédia. https://en.wikipedia.org/wiki/Planar_graph
- Teste de planaridade. Wikipédia. https://en.wikipedia.org/wiki/Planarity_testing