Ciclos hamiltonianos e o problema do caixeiro viajante

Marco A L Barbosa

malbarbo.pro.br

Departamento de Informática
Universidade Estadual de Maringá

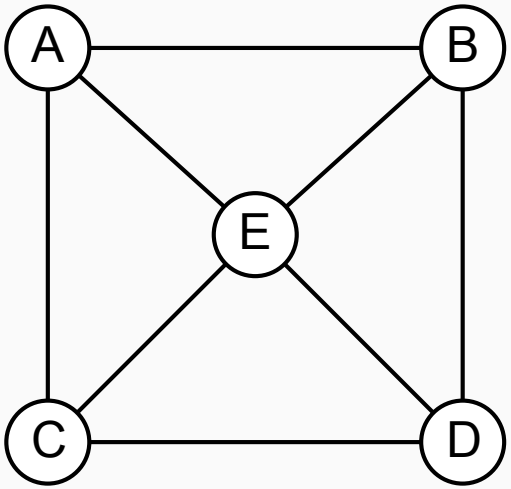
Introdução

Um **caminho hamiltoniano** é um caminho que passa por cada vértice do grafo exatamente uma vez

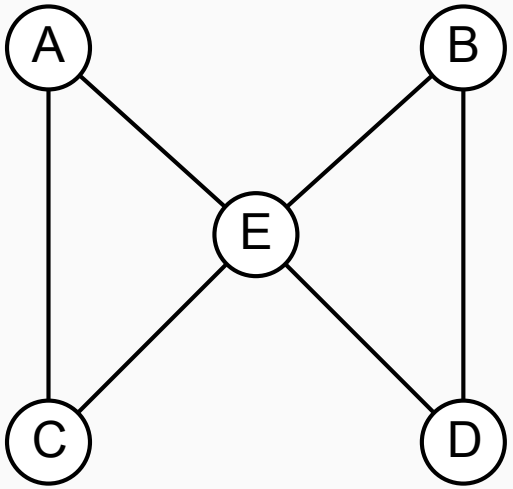
Um **ciclo hamiltoniano** é um ciclo que passa por cada vértice do grafo exatamente uma vez (exceto o primeiro vértice que é visitado duas vezes)

Um **grafo hamiltoniano** é um grafo que tem um ciclo hamiltoniano

Exemplos



Este grafo é hamiltoniano:
A, C, E, D, B, A



Este grafo não é hamiltoniano

Propriedades

Como determinar se um grafo é hamiltoniano?

Teorema de Ore

- Uma condição suficiente (mas não necessária) para que um grafo $G = (V, E)$ seja hamiltoniano é que a soma dos graus de cada par de vértices não adjacentes seja no mínimo $|V|$

Teorema de Dirac

- Uma condição suficiente (mas não necessária) para que um grafo $G = (V, E)$ possua um ciclo hamiltoniano, é que o grau de cada vértice em G seja pelo menos igual a $\frac{|V|}{2}$

E algoritmos?

Algoritmos

O problema de determinar se um grafo é hamiltoniano é NP-completo, portanto não são conhecidos algoritmos de tempo polinomial para resolvê-lo.

Podemos abordar a questão como um problema de otimização e utilizar algoritmos heurísticos.

O problema do caixeiro viajante

Dado um grafo conexo com peso nas arestas, o **problema do caixeiro viajante** (do inglês *travelling salesman problem* - TSP) consiste em encontrar um ciclo hamiltoniano de peso mínimo.

Aplicações

- Planejamento de entregas
- Perfuração de placas de circuito impresso
- Sequenciamento de DNA (subproblema)

O problema do caixeiro viajante

O TSP é NP-Difícil, o que implica que, a menos que $P = NP$, não existem algoritmos exatos de tempo polinomial para resolver este problema. Desta forma, é comum estudar algoritmos que não são exatos (não garantem encontrar o ótimo) mas executam em tempo polinomial.

Veremos os seguintes algoritmos

- Algoritmo aproximativo baseado na árvore geradora mínima
- Algoritmo heurístico construtivo vizinho mais próximo
- Algoritmo heurístico melhorativo 2-opt e 3-opt

Algoritmo baseado na árvore geradora mínima

Ideia

- Construir uma árvore geradora mínima é fazer um percurso pré-ordem

Característica

- Algoritmo aproximativo com fator de aproximação 2

Requisito

- A função de custo c tem que respeitar a desigualdade de triângulos (o caminho mais curto entre dois vértices não passa por vértice intermediário) isto é, para todo vértice $u, v, w \in V$

$$c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$$

Algoritmo baseado na árvore geradora mínima

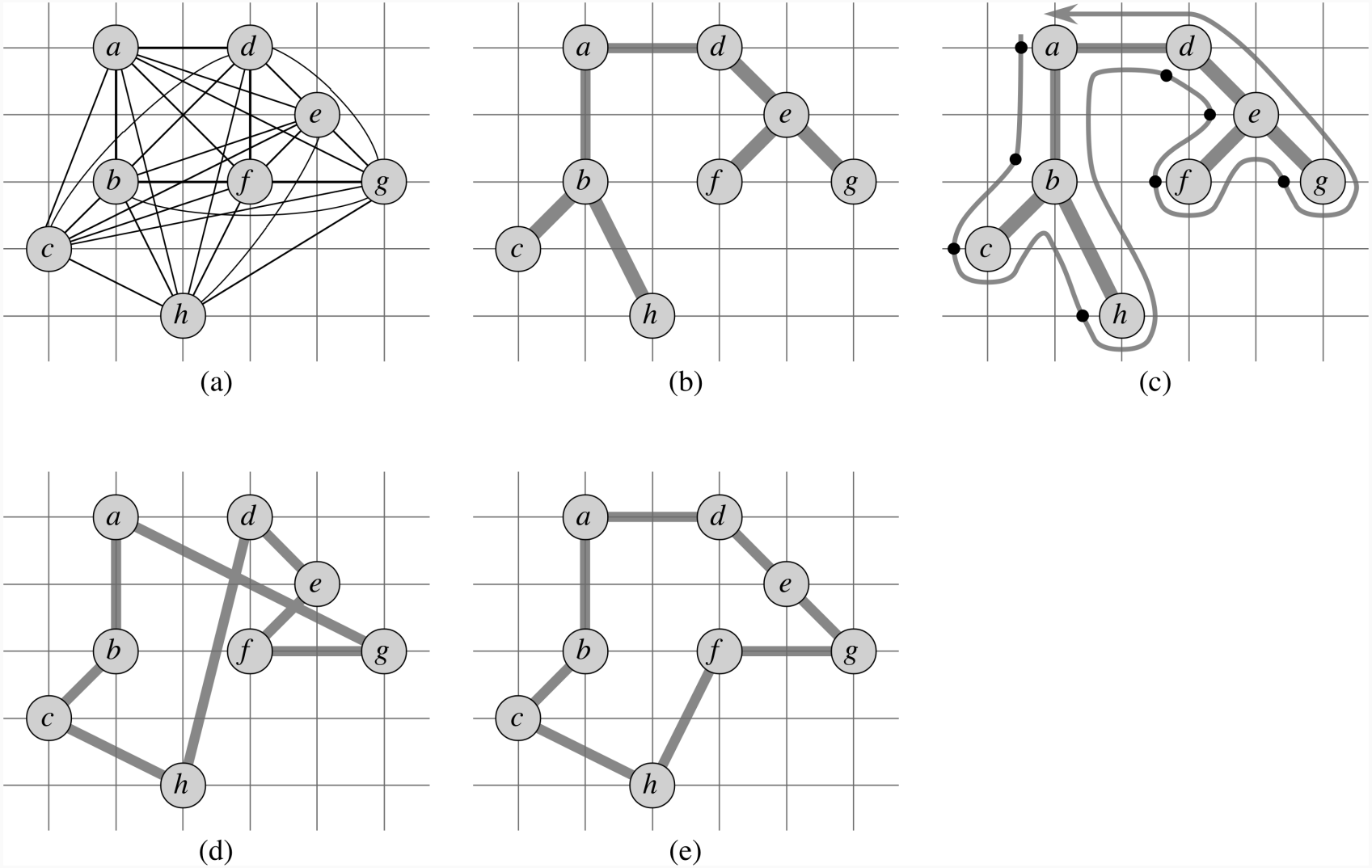
TSP-MST(G, c)

1. selecionar um vértice $r \in G.V$ para ser a raiz
2. computar a árvore geradora mínima T usando MST-Prim(G, c, r)
3. seja H a lista de vértices ordenado de acordo com uma visitação em pré-ordem da árvore T
4. **return** o ciclo hamiltoniano H

Análise do tempo de execução

- Com uma implementação do MST-Prim usando arranjo e busca linear para fila de prioridade, o tempo de execução é $\Theta(V^2)$

Algoritmo baseado na árvore geradora mínima



Algoritmo baseado na árvore geradora mínima

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	—	2.0	3.2	2.0	3.2	2.8	4.5	4.1
b	2.0	—	1.4	2.8	3.2	2.0	4.0	2.2
c	3.2	1.4	—	4.2	4.5	3.2	5.1	2.2
d	2.0	2.8	4.2	—	1.4	2.0	2.8	4.1
e	3.1	3.2	4.5	1.4	—	1.4	1.4	3.6
f	2.8	2.0	3.1	2.0	1.4	—	2.0	2.2
g	4.5	4.0	5.1	2.8	1.4	2.0	—	3.6
h	4.1	2.2	2.2	4.1	3.6	2.2	3.6	—

Caminho encontrado por TSP-MST $\langle a, b, c, h, d, e, f, g, a \rangle$, custo = 19,1

Melhor caminho $\langle a, b, c, h, f, g, e, d, a \rangle$, custo = 14,7

Algoritmo baseado na árvore geradora mínima

Prova do fator de aproximação 2

Discutido em sala (veja a seção 35.2.1 do livro do Cormen)

Heurística do vizinho mais próximo

Ideia

- Começar com um vértice qualquer
- A cada passo, escolher o vértice mais próximo do último vértice visitado
- Voltar para o primeiro vértice

Heurística do vizinho mais próximo

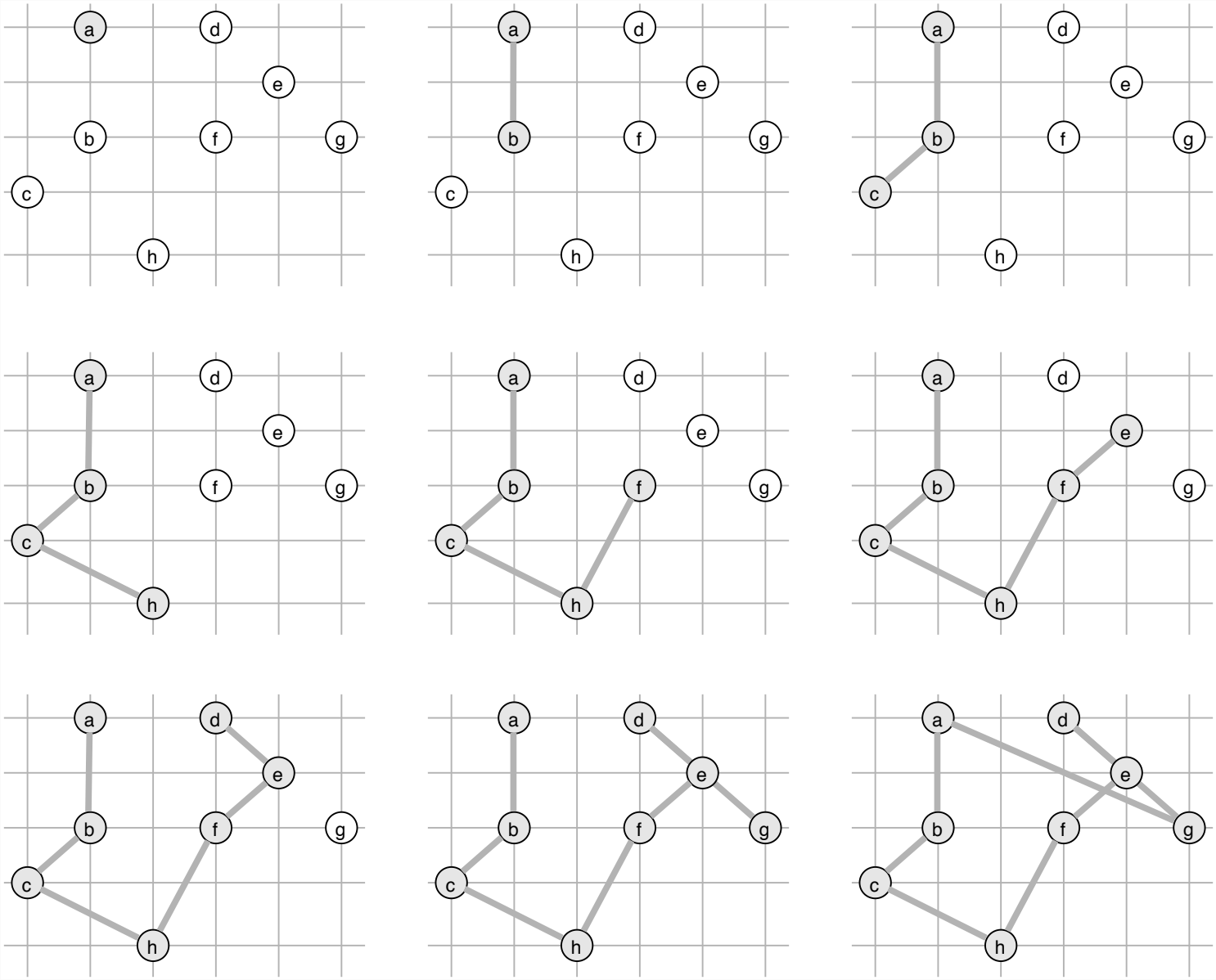
TSP-NN(G, c)

1 selecionar um vértice inicial $v_0 \in G.V$
2 $C = \langle v_0 \rangle$ // caminho contendo v_0
3 $v = v_0$
4 **while** C não incluí todos os vértices de G
5 $u =$ vértice mais próximo de v que não está em C
6 $C = C \cup \langle u \rangle$
7 $v = u$
8 $C = C \cup \langle v_0 \rangle$ // fecha o ciclo
9 **return** C

Análise do tempo de execução

- Encontrar o vértice mais próximo que não foi visitado (linha 5) usando uma busca linear custa $O(V)$
- Como cada vértice (a menos do primeiro) é colocado uma vez no ciclo, o tempo total de execução do algoritmo é $O(V^2)$

Heurística do vizinho mais próximo



Heurística do vizinho mais próximo

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	—	2.0	3.2	2.0	3.2	2.8	4.5	4.1
b	2.0	—	1.4	2.8	3.2	2.0	4.0	2.2
c	3.2	1.4	—	4.2	4.5	3.2	5.1	2.2
d	2.0	2.8	4.2	—	1.4	2.0	2.8	4.1
e	3.1	3.2	4.5	1.4	—	1.4	1.4	3.6
f	2.8	2.0	3.1	2.0	1.4	—	2.0	2.2
g	4.5	4.0	5.1	2.8	1.4	2.0	—	3.6
h	4.1	2.2	2.2	4.1	3.6	2.2	3.6	—

Caminho encontrado por TSP-MST $\langle a, b, c, h, f, e, d, g, a \rangle$, custo = 17,9

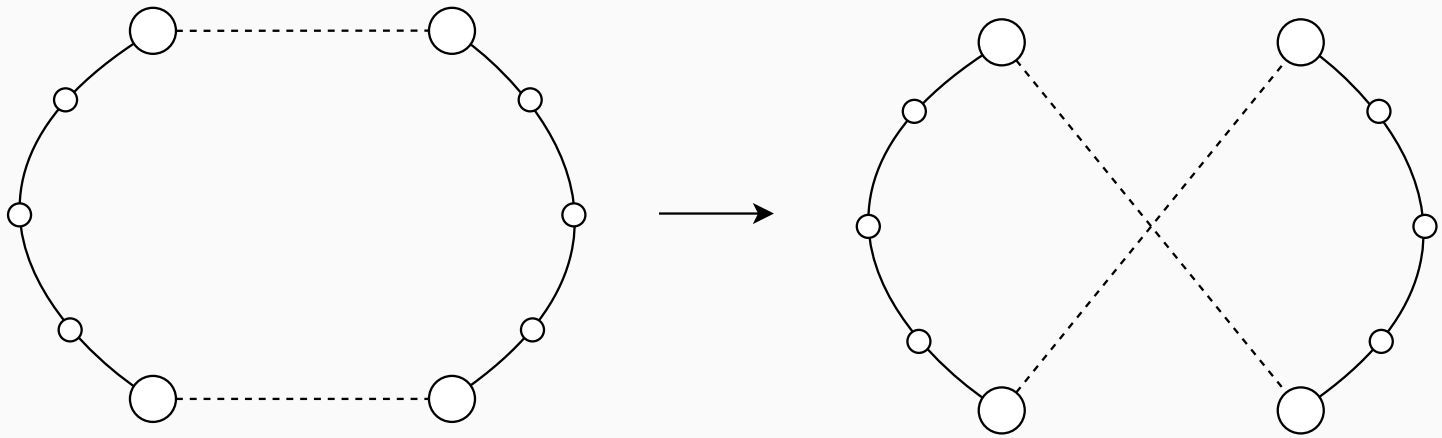
Melhor caminho $\langle a, b, c, h, f, g, e, d, a \rangle$, custo = 14,7

Heurística 2-opt

Usada para melhorar uma solução (obtida por algum algoritmo construtivo)

Ideia

- Eliminar 2 arestas não adjacentes e reconectar o caminho usado duas outras arestas, verificar se houve melhora
- Repetir este processo para todos os pares de arestas e realizar a melhor troca



Heurística 2-opt

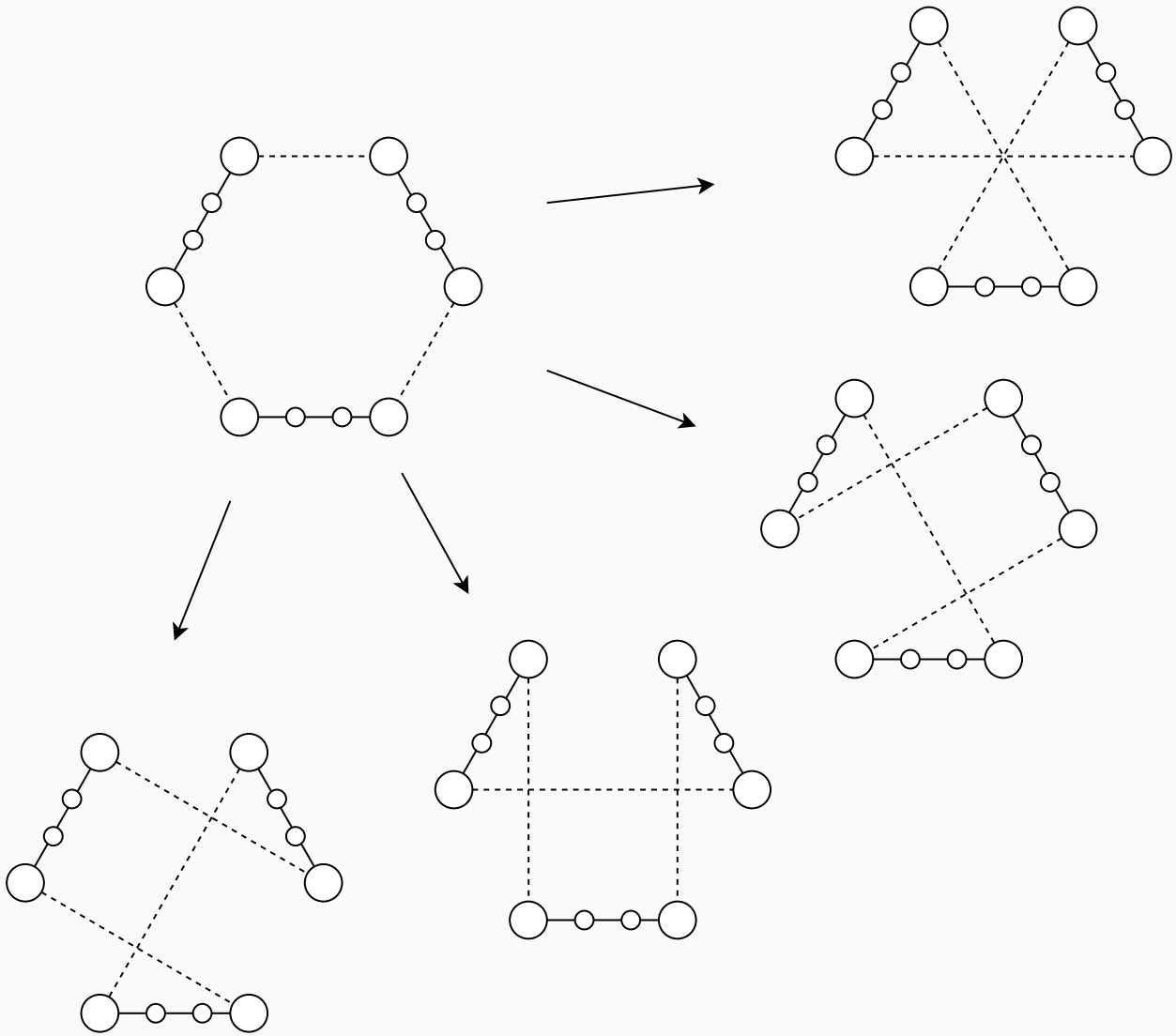
- Seja w a função de custo e t um percurso
- Vamos supor que o percurso t é representado por um vetor (índices $1..|V|$) de vértices. A aresta $(t_{|V|}, t_1)$ está implícita nesta representação
- Seja (t_a, t_b) e (t_c, t_d) duas arestas não adjacentes de t (a, b, c, d são os índices em t)
- Seja t' o percurso (válido) obtido a partir de t trocando a aresta (t_a, t_b) por (t_a, t_c) e (t_c, t_d) por (t_b, t_d)
- Seja $\delta = w(t_a, t_b) + w(t_c, t_d) - w(t_a, t_c) - w(t_b, t_d)$ a diferença do custo de t e t' (quando maior a diferença, maior a melhoria)
- Seja $\delta_{\max}$ o maior valor entre os δ's de todas as trocas de arestas

Heurística 2-opt

```
tsp-2opt(t, w)
1  loop
2    δ_max = 0
3    best = nil
4     for a = 1..(n − 2)
5       b = a + 1
6       lim = n if a ≠ 1 else n − 1
7        for c = (a + 2)..lim
8           d = c + 1 if c ≠ n else 1
9           δ = w(t_a, t_b) + w(t_c, t_d) − w(t_a, t_c) − w(t_b, t_d)
10           if δ > δ_max
11              δ_max = δ
12              best = a, b, c, d
13    if δ_max! = 0
14       a, b, c, d = best
15       t = (t − {(t_a, t_b), (t_c, t_d)}) ∪ {(t_a, t_c), (t_b, t_d)}
16    else
17       return t
```

Heurística 3-opt

Mesmo princípio do 2-opt, mas seleciona 3 arestas



Referências

- Thomas H. Cormen et al. Introduction to Algorithms. 3rd edition. Capítulo 35.2.1.
- Caminho hamiltoniano. Wikipédia. https://pt.wikipedia.org/wiki/Caminho_hamiltoniano
- Problema do caminho hamiltoniano. Wikipédia https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path_problem
- Problema do caixeiro viajante. Wikipédia. https://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem
- Algoritmo vizinho mais próximo. Wikipédia. https://en.wikipedia.org/wiki/Nearest_neighbour_algorithm
- Algoritmo de Christofides. Wikipédia. https://en.wikipedia.org/wiki/Christofides_algorithm