

Fluxo em redes

Marco A L Barbosa

malbarbo.pro.br

Departamento de Informática

Universidade Estadual de Maringá



Este trabalho está licenciado com uma Licença Creative Commons - Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional.

<http://github.com/malbarbo/na-grafos>

Uma **rede** $G = (V, E)$ é um grafo orientado no qual cada aresta $(u, v) \in E$ tem uma capacidade $c(u, v) \geq 0$

- Se G contém a aresta (u, v) ele não pode conter (v, u)
- Se $(u, v) \notin E$, então $c(u, v) = 0$
- Destacamos dois vértice s (**fonte**) e t (**sumidouro**)
- Para cada vértice $v \in V$, temos $s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$

Um **fluxo** em G é uma função $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades

- **Restrição de capacidade:** Para todo $u, v \in V$,

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$$

- **Conservação do fluxo:** Para todo $u \in V - \{s, t\}$

$$\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v)$$

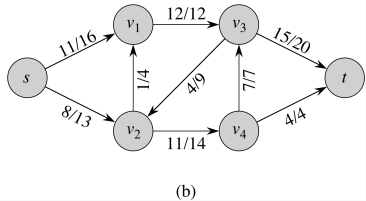
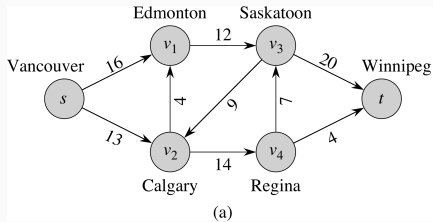
A quantidade $f(u, v)$ é chamada de fluxo entre u e v . Quando $(u, v) \notin E$, não pode haver fluxo de u para v e portanto $f(u, v) = 0$

O **valor** $|f|$ do fluxo f é definido como

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

ou seja, o fluxo total que saí de s menos o fluxo total que entra em s .

Exemplo

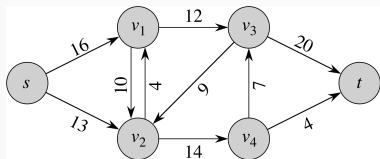


Dado uma rede G , uma fonte s e um sumidouro t , o **problema do fluxo máximo** consiste em encontrar um fluxo em G de valor máximo.

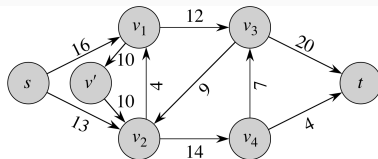
Arestas antiparalelas

- Suponha que a firma de caminhões oferecesse para Lucky Puck a oportunidade de transportar 10 engradados nos caminhões indo de Edmonton para Calgary
- Parece-se uma boa oportunidade, o problema é que isto viola a restrição de que se $(v_1, v_2) \in E$, então $(v_2, v_1) \notin E$ (as arestas (v_1, v_2) e (v_2, v_1) são chamadas de **antiparalelas**)
- Transformamos em uma rede equivalente
 - Escolhemos uma aresta, neste caso (v_1, v_2) , e a dividimos adicionando um v' substituindo a aresta (v_1, v_2) pelas arestas (v_1, v') e (v', v_2)

Criando modelos



(a)

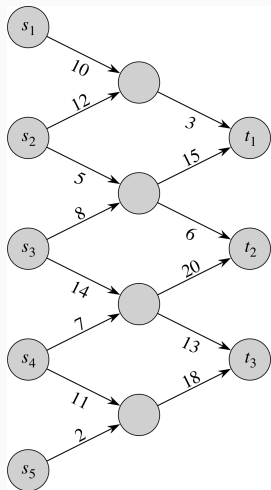


(b)

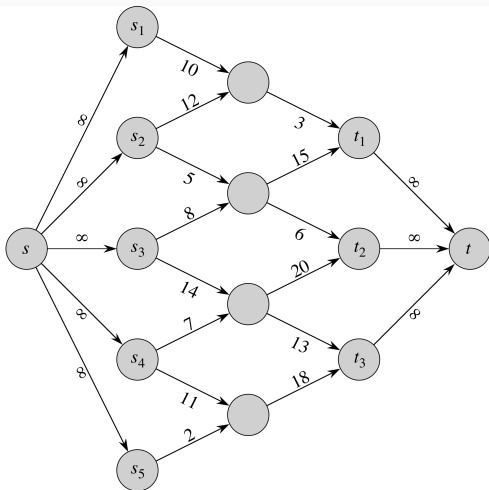
Redes com múltiplas fontes e sumidouros

- A empresa poderia ter mais que uma fábrica e mais que um depósito
- Não está de acordo com a definição de rede
- Transformamos em uma rede equivalente
 - Adicionamos uma super fonte s e arestas com capacidade ∞ de s para cada fonte original
 - Adicionamos um super sumidouro e arestas com capacidade ∞ de cada sumidouro original para o super sumidouro

Criando modelos



(a)



(b)

Chamamos de método e não algoritmo pois engloba diversas implementações com tempo de execução diferentes.

Conceitos importantes utilizados por este e outro algoritmos de redes

- Rede residual
- Caminho de aumento
- Corte

Ideia: incrementar iterativamente o valor do fluxo

- Começamos com $f(u, v) = 0$ para todo $u, v \in G$ (portanto $|f| = 0$)
- A cada iteração, aumentamos o valor do fluxo encontrado um “caminho de aumento” na “rede residual” G_f
- O processo continua até que nenhum caminho de aumento é encontrado
- O teorema do fluxo máximo e corte mínimo garante que este processo produz o fluxo máximo no término

FORD-FULKERSON-METHOD(G, s, t)

- 1 Iniciar o fluxo f com 0
- 2 **while** existe um caminho de aumento p na rede residual G_f
- 3 aumente f ao longo de p
- 4 **return** f

Intuitivamente, uma rede residual G_f de uma rede G e um fluxo f consiste de arestas com capacidades que representam como o fluxo das arestas de G podem ser alterados

- O fluxo em uma aresta pode aumentar ou diminuir

Seja $G = (V, E)$ uma rede com fonte s e sumidouro t , f um fluxo em G e $u, v \in V$

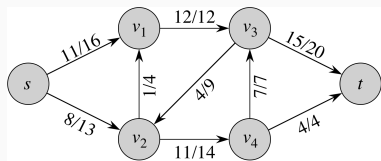
- A **capacidade residual** $c_f(u, v)$ é definida como

$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{se } (u, v) \in E \\ f(v, u) & \text{se } (v, u) \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

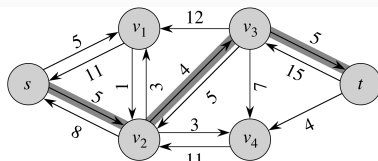
- A **rede residual** de G induzida por f é $G_f = (V, E_f)$, onde

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\} \text{ e } |E_f| \leq 2|E|$$

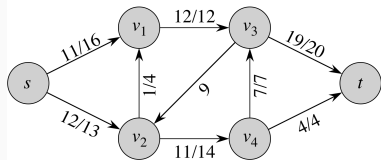
Exemplo de rede residual



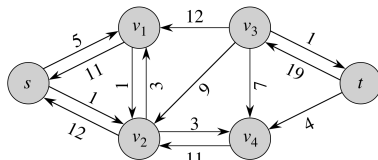
(a)



(b)



(c)



(d)

Se f é um fluxo em G e f' é um fluxo na rede residual G_f correspondente, definimos $f \uparrow f'$, o **aumento** do fluxo f por f' , como sendo a função $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f \uparrow f')(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + f'(u, v) - f'(v, u) & \text{se } (u, v) \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Esta definição reflete o propósito da forma que fizemos a definição de rede residual: descrever como o fluxo pode ser alterado em uma aresta. O fluxo entre (u, v) aumenta por $f'(u, v)$ mas diminui por $f'(v, u)$.

Lema 26.1

Seja $G = (V, E)$ uma rede com fonte s e sumidouro t e seja f um fluxo em G . Seja G_f uma rede residual de G induzida por f e seja f' um fluxo em G_f . Então a função $f \uparrow f'$ definida na equação (26.4) é um fluxo em G com valor $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$.

Prova

Vista em sala (veja o livro).

Dado uma rede $G = (V, E)$ e um fluxo f , um **caminho de aumento** p é um caminho simples de s para t na rede residual G_f .

O valor máximo que pode ser aumentado no fluxo de cada aresta no caminho de aumento p é chamado **capacidade residual** de p , e é dado por

$$c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ está em } p\}$$

.

Lema 26.2

Seja $G = (V, E)$ uma rede, f um fluxo em G e p um caminho de aumento em G_f . Seja a função $f_p : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{se } (u, v) \text{ está em } p \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então, f_p é um fluxo em G_f com valor $|f_p| = c_f(p) > 0$.

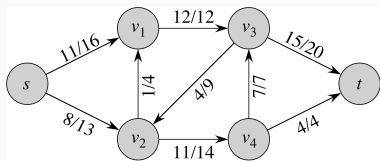
Corolário 26.3

Seja $G = (V, E)$ uma rede, f um fluxo em G e p um caminho de aumento em G_f . Seja a função f_p como definido na equação (26.8) e suponha que nós aumentamos f por f_p . Então a função $f \uparrow f_p$ é um fluxo em G com valor $|f \uparrow f_p| = |f| + |f_p| > |f|$.

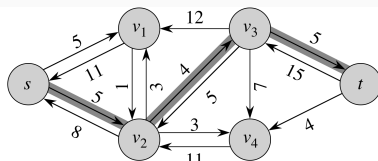
Prova

A partir dos lemas 26.1 e 26.2.

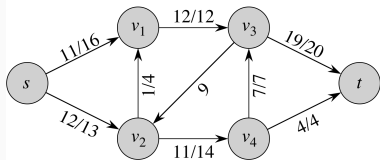
Exemplo de caminho de aumento



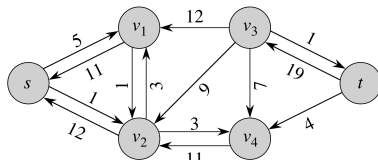
(a)



(b)



(c)



(d)

Corte de rede

Um corte (S, T) de uma rede $G = (V, E)$ é uma partição de V em S e $T = V - S$, tal que $s \in S$ e $t \in T$

- Se f é um fluxo, então o **fluxo líquido** $f(S, T)$ através do corte (S, T) é definido como

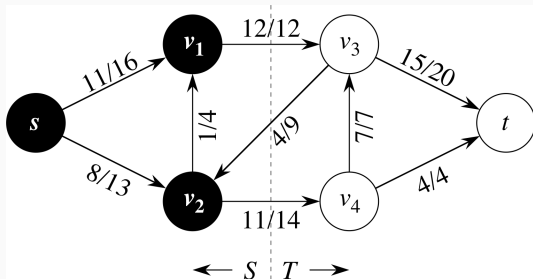
$$f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u)$$

- A **capacidade** do corte (S, T) é

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

- Um **corte mínimo** de uma rede é um corte que tem capacidade mínima entre todos os cortes da rede

Exemplo de corte



Lema 26.4

Seja f um fluxo em uma rede G com fonte s e sumidouro t , e seja (S, T) qualquer corte de G . Então o fluxo líquido através do corte (S, T) é $f(S, T) = |f|$.

Prova

Vista em sala (veja o livro).

Corolário 26.5

O valor do fluxo f em uma rede G é limitado superiormente pela capacidade de qualquer corte de G .

Prova

Vista em sala (veja o livro).

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema 26.6

O valor do fluxo máximo é igual a capacidade de um corte mínimo.

Seja f um fluxo em uma rede $G = (V, E)$ com fonte s e sumidouro t , então as seguintes condições são equivalentes:

1. f é um fluxo máximo em G
2. A rede residual G_f não contém nenhum caminho de aumento
3. $|f| = c(S, T)$ para algum corte (S, T) de G

Prova

Vista em sala (veja o livro)

Lembrando o método de Ford-Fulkerson...

Em cada iteração algum caminho de aumento p é encontrado e utilizado para modificar o fluxo f .

O fluxo f é substituído por $f \uparrow f_p$, gerando um novo fluxo com valor $|f| + |f_p|$.

Quando não existe mais caminho de aumento, f é máximo

Como atualizar o fluxo em cada arestas?

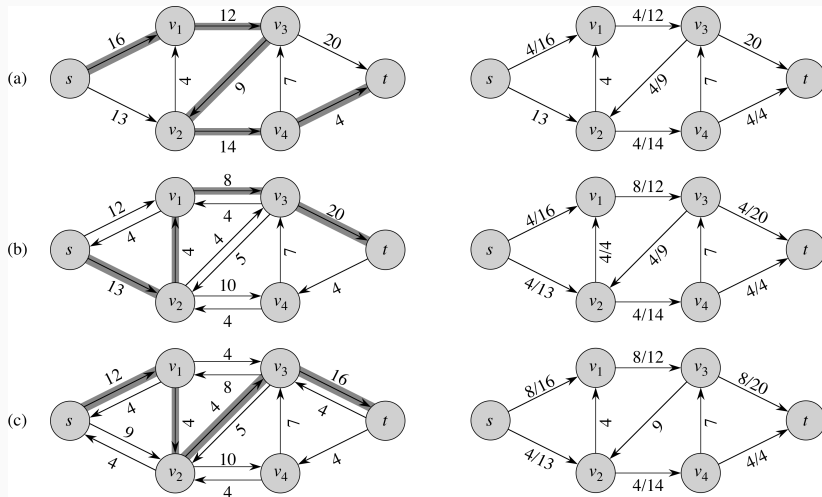
- Cada aresta residual em p é uma aresta na rede original ou uma aresta contrária na rede original
- Fluxo é adicionado se a aresta é a original
- Fluxo é removido se a aresta é contrária

Algoritmo básico de Ford-Fulkerson

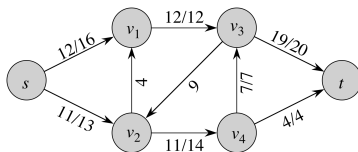
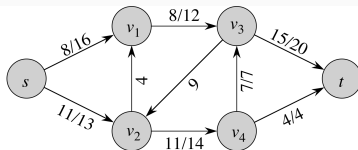
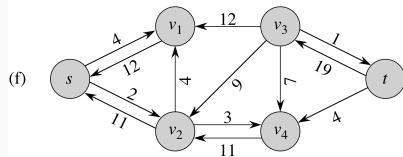
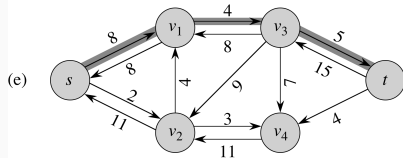
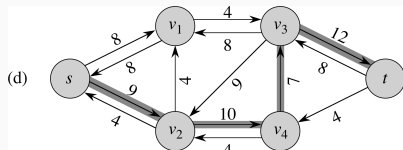
FORD-FULKERSON(G, s, t)

```
1  for  $(u, v) \in G.E$ 
2       $(u, v).f = 0$ 
3  while existe um caminho  $p$  de  $s$  a  $t$  em  $G_f$ 
4       $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ está em } p\}$ 
5      for  $(u, v) \in p$ 
6          if  $(u, v) \in E$ 
7               $(u, v).f = (u, v).f + c_f(p)$ 
8          else
9               $(v, u).f = (v, u).f - c_f(p)$ 
10 return  $f$ 
```

Exemplo de execução



Exemplo de execução



Análise do tempo de execução

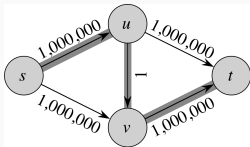
- Depende de como o caminho p é escolhido
- Vamos supor que todas as capacidades sejam inteiras

Algoritmo básico de Ford-Fulkerson

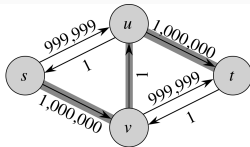
Análise do tempo de execução

- Seja f^* o fluxo máximo na rede residual
- Então, o laço **while** das linhas 3-8 executa no máximo $|f^*|$, isto porque o valor do fluxo aumenta em pelo menos uma unidade em cada iteração
- O conteúdo dentro do **while** pode ser executado de forma eficiente se escolhermos a estrutura correta para representar a rede e se o caminho de aumento for encontrado em tempo linear
 - Manter um grafo $G' = (V, E')$, onde
$$E' = \{(u, v) : (u, v) \in E \text{ ou } (v, u) \in E\}$$
 - Encontrar o caminho de aumento com DFS ou BFS, tempo
$$O(V + E') = O(E)$$
 - Cada iteração demora $O(E)$
- Portanto, o tempo de execução do algoritmo é $O(E|f^*|)$

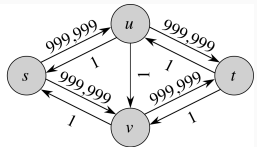
Exemplo ruim



(a)



(b)



(c)

O algoritmo de Edmonds-Karp utiliza busca em largura para encontrar o caminho de aumento p

- Escolher o menor caminho entre s e t , sendo que o tamanho do caminho é o número de arestas no caminho
- Executa em $O(VE^2)$

- Thomas H. Cormen et al. Introduction to Algorithms. 3rd edition.
Capítulo 26.