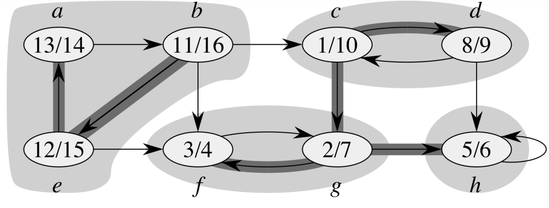
Componentes fortemente conexos

Marco A L Barbosa
malbarbo.pro.br

Departamento de Informática
Universidade Estadual de Maringá

- Um **componente fortemente conexo** (SCC) de um grafo orientado $G = (V, E)$ é um conjunto máximo de vértices $C \subseteq V$, tal que, para todo par de vértice u e v, $u \rightsquigarrow v$ e $v \rightsquigarrow u$

(a)



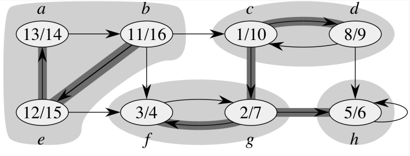
Grafo transposto

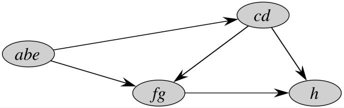
- O algoritmo para identificar componentes fortemente conexos utiliza o grafo transposto de $G = (V, E)$
  - $G^T = (V, E^T), E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$
  - G^T é G com todas as arestas invertidas
  - G^T pode ser calculado em tempo $\Theta(V + E)$ para a representação de lista de adjacências
  - G e G^T tem os mesmos SCC's

Grafo de componentes

- Grafo de componentes
  - $G^{\text{SCC}} = (V^{\text{SCC}}, E^{\text{SCC}})$
  - V^{SCC} tem um vértice para cada SCC em G
  - E^{SCC} contém uma aresta se existe uma aresta correspondente entre os SCC's de G

- Um dos aspectos chaves para o algoritmo que veremos é que G^{SCC} é um gao

(a)


(c)


Lema 22.13
Sejam C e C' SCC distintos em um grafo orientado $G = (V, E)$, seja $u, v \in C$ e seja $u', v' \in C'$. Suponha que exista um caminho $u \rightsquigarrow u'$ em G. Então, não pode existir um caminho $v' \rightsquigarrow v$ em G

Prova
Suponha que exista um caminho $v' \rightsquigarrow v$ em G. Então existem caminhos $u \rightsquigarrow u' \rightsquigarrow v'$ e $v' \rightsquigarrow v \rightsquigarrow u$ em G. Portanto, u e v' são acessíveis um a partir do outro, e não podem estar em SCC separados

Procedimento STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS

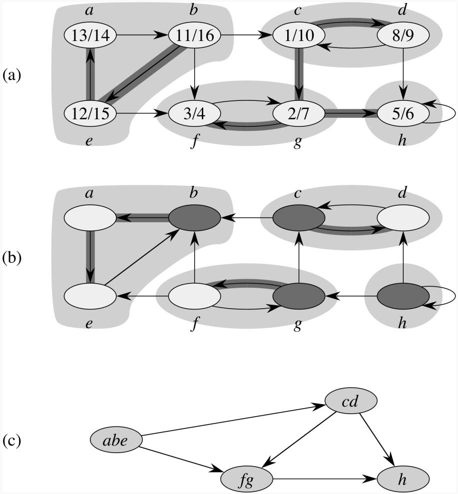
STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS(G)

1 chamar DFS(G) para calcular o tempo de término $v.f$ de cara vértice
2 calcular G^T
3 chamar DFS(G^T) mas, no laço principal de DFS, considerar os vértices em ordem decrescente de $u.f$
4 os vértices de cada árvore DFS formada na linha 3 formam um componente fortemente conexo

Tempo de execução

- O tempo do DFS das linhas 1 e 3 é $\Theta(V + E)$
- Conforme os vértices são terminados na chamada do DFS da linha 1, os vértices são inseridos na frente de uma lista ligada ($O(1)$), como cada vértice é inserido apenas uma vez, o tempo total de operações de inserções é $\Theta(V)$
- O tempo para calcular o grafo transposto na linha 2 é $\Theta(V + E)$
- Portanto, o tempo de execução do algoritmo é $\Theta(V + E)$

Exemplo de execução



- Ao considerar os vértices na segunda execução do DFS na ordem decrescente dos tempos de términos obtidos na primeira execução do DFS, estamos visitando os vértices do grafo de componentes em ordem topológica

- Vamos definir duas questões de notação
  - As referências a $u.d$ e $u.f$ referem-se aos valores obtidos na primeira execução do DFS
  - Para um conjunto $U \subseteq V$, definimos
    - $d(U) = \min_{u \in U}\{u.d\}$ (tempo de descoberta mais antigo)
    - $f(U) = \max_{u \in U}\{u.f\}$ (tempo de término mais recente)

Lema 22.14
Sejam C e C' SCC distintos em $G = (V, E)$. Suponha que exista uma aresta $(u, v) \in E$, tal que $u \in C$ e $v \in C'$. Então $f(C) > f(C')$.

Prova
Que componente teve o primeiro vértice descoberto, C ou C'? Vamos considerar os dois casos

Corretude do STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS

- No primeiro caso $d(C) < d(C')$. Seja x o primeiro vértice descoberto de C
  - Qual a cor dos vértices em C e C' no momento em que x é descoberto? Branco, porque x foi o primeiro vértice descoberto de C e C'
  - Existe um caminho de vértices branco de x para todos os vértices de C
  - Como $(u, v) \in E$ e $u \in C$ e $v \in C'$, então existe um caminho de vértices brancos de $x \rightsquigarrow u \rightarrow v \rightsquigarrow w$ para cada vértice $w \in C'$
  - Portanto, pelo teorema do caminho branco, todos os vértices de C e C' se tornam descendentes de x
  - Pelo Corolário 22.8, x tem o maior tempo de término entre todos os descentes e portanto $x.f = f(C) > f(C')$.

Corretude do STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS

- No segundo caso $d(C') < d(C)$. Seja y o primeiro vértice descoberto de C'
  - Qual a cor dos vértices em C e C' no momento em que y é descoberto? Branco, porque y foi o primeiro vértice descoberto de C e C'
  - Existe um caminho de vértices branco de y para todos os vértices de C'. Então todos os vértices de C' se tornam descendentes de y e portanto $y.f = f(C')$
  - E os vértices de C serão descendentes de y? Como existe a aresta (u, v) de C para C', não pode existir uma aresta de C' para C (Lema 22.13) e portanto os vértices de C não são acessíveis a partir de y e não serão seu descendentes
  - Portanto, no tempo $y.f$ todos os vértices de C ainda são brancos, então para qualquer vértices $w \in C$, $w.f > y.f$ e portanto $f(C) > f(C')$

Corolário 22.15
Sejam C e C' SCC distintos em $G = (V, E)$. Suponha que exista uma aresta $(u, v) \in E^T$, tal que $u \in C$ e $v \in C'$. Então $f(C) < f(C')$

Teorema 22.16
STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS(G) calcula corretamente os SCC's de um grafo orientado G

- A segunda execução do DFS começa com um SCC C tal que $f(C)$ é máximo
- Seja $x \in C$ o vértice inicial, a segunda execução do DFS visita todos os vértices de C. Pelo corolário 22.15, como $f(C) > f(C')$ para todo $C \neq C'$, não existe aresta de C para C'. Logo, o DFS visita apenas os vértices de C (descobrindo este SCC)
- A próxima origem escolhida na segunda execução do DFS está em um SCC C' tal que $f(C')$ é máximo em relação a todos os outros SCC (sem considerar C). O DFS visita todos os vértices de C', e as únicas arestas para fora de C' vão para C, cujo os vértices já foram visitados
- O processo continua até que todos os vértices sejam visitados

- Cada vez que uma origem é escolhida pelo segundo DFS, ele só pode alcançar
    - Os vértices no SCC dele (através de arestas da árvore)
    - Os vértices que já foram visitados no segundo DFS

- Thomas H. Cormen et al. Introduction to Algorithms. 3^{rd} edition. Capítulo 22.5.