

Ordenação topológica

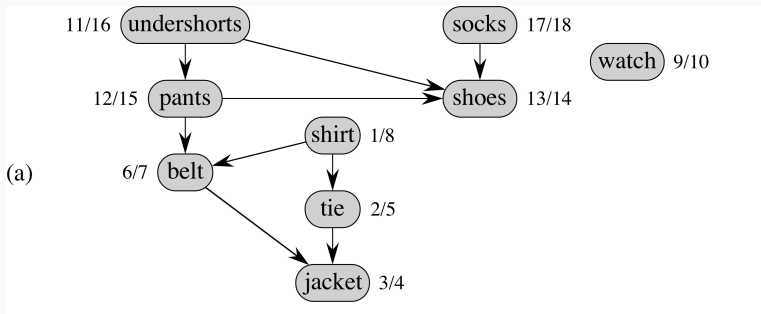
Marco A L Barbosa
malbarbo.pro.br

Departamento de Informática
Universidade Estadual de Maringá



Este trabalho está licenciado com uma Licença Creative Commons - Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional.
<http://github.com/malbarbo/na-grafos>

- Uma **ordenação topológica** de um grafo acíclico orientado $G = (V, E)$ é uma ordenação linear de todos os vértices, tal que para toda aresta $(u, v) \in E$, u aparece antes de v na ordenação
- Se os vértices forem dispostos em uma linha horizontal, todas as arestas devem ter a orientação da esquerda para direita
- Aplicações
 - Definição da ordem de execução de tarefas dependentes
 - Por exemplo, **Makefile**



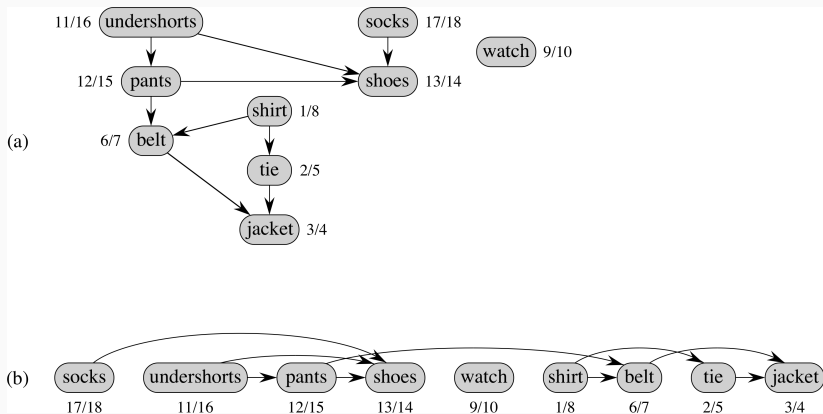
TOPOLOGICAL-SORT(G)

- 1 chamar DFS(G) para calcular o tempo de término $v.f$ para cada vértice
- 2 à medida que cada vértice é finalizado, inserir o vértice à frente de uma lista ligada
- 3 **return** a lista ligada de vértices

Tempo de execução

- O tempo de execução da busca em profundidade é $\Theta(V + E)$
- O tempo para inserir cada vértice na lista de saída é $O(1)$, cada vértice é inserido apenas uma vez e portanto o tempo total gasto em operações de inserções é de $\Theta(V)$
- Portanto, o tempo de execução do algoritmo é $\Theta(V + E)$

Exemplo de execução



Lema 22.11

Um grafo orientado G é acíclico se e somente se uma busca em profundidade de G não encontra arestas de retorno.

Prova feita em sala. Veja o livro para detalhes.

Teorema 22.12

TOPOLOGICAL-SORT(G) produz uma ordenação topológica do grafo acíclico orientado G .

Precisamos mostrar que se $(u, v) \in E$, então $v.f < u.f$.

- Quando a aresta (u, v) é explorada, quais são as cores de u e v ?
 - u é cinza
 - v é cinza também?
 - Não, porque isto implicaria que v é ancestral de u , e portando a aresta (u, v) seria uma aresta de retorno. Graos não contém arestas de retorno
 - v é branco?
 - Então v torna-se um descendente de u . Pelo teorema do parênteses $u.d < v.d < v.f < u.f$
 - v é preto?
 - Então v já foi finalizado. Como a aresta (u, v) está sendo explorada, u não foi finalizado, logo $v.f < u.f$

- Thomas H. Cormen et al. Introduction to Algorithms. 3rd edition.
Capítulo 22.4.