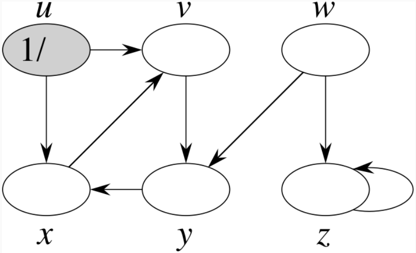
Busca em profundidade

Marco A L Barbosa
malbarbo.pro.br

Departamento de Informática
Universidade Estadual de Maringá

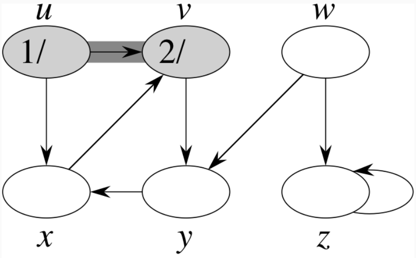
- Procurar “mais fundo” no grafo sempre que possível (*Depth-first search* - DFS em inglês)
- As arestas são exploradas a partir do vértices v mais recentemente descoberto que ainda tem arestas inexploradas saindo dele
- Quando todas as arestas de v são exploradas, a busca regressa para explorar as arestas que deixam o vértice a partir do qual v foi descoberto
- Este processo continua até que todos os vértices acessíveis a partir da origem tenham sidos descobertos
- Se restarem vértices não descobertos, a busca se repetirá para estes vértices

- Durante a execução do algoritmo, diversos atributos são definidos para os vértices
- Quando um vértice v é descoberto a partir de um vértice u, o campo predecessor $v.\pi = u$ é definido
- Cada vértice é inicialmente branco, o vértice é marcado de cinza quando é descoberto e marcado de preto quando é terminado (sua lista de adjacências é completamente examinada)
- Cada vértice tem dois carimbos de tempo $v.d$ (quando o vértice é descoberto) e $v.f$ (quando o vértice é terminado)



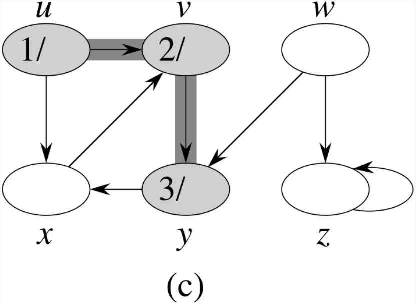
(a)

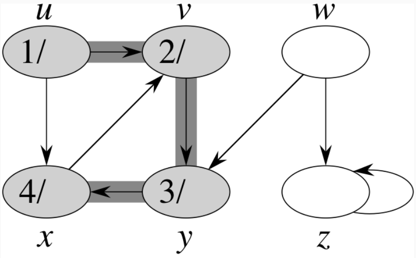
Exemplo de execução



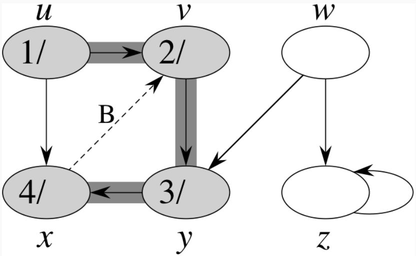
(b)

Exemplo de execução

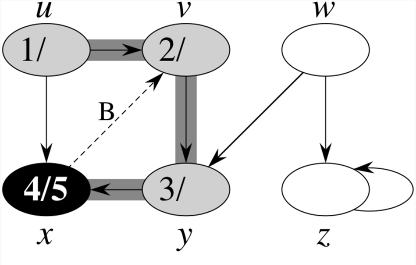




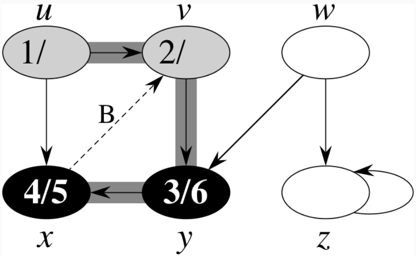
(d)



(e)

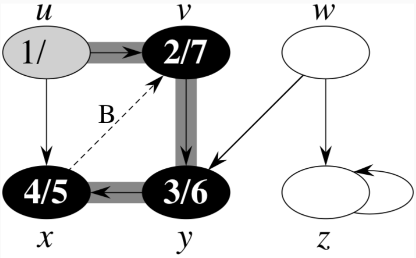


(f)

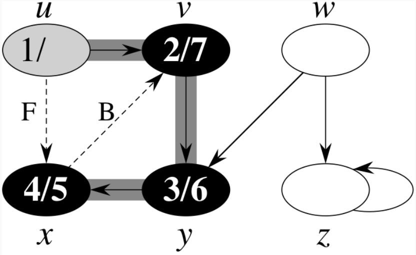


(g)

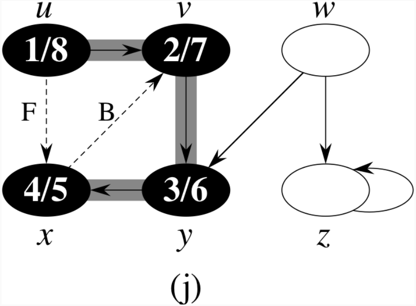
Exemplo de execução

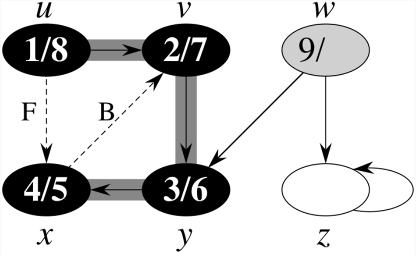


(h)

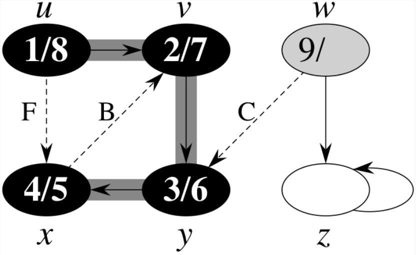


(i)

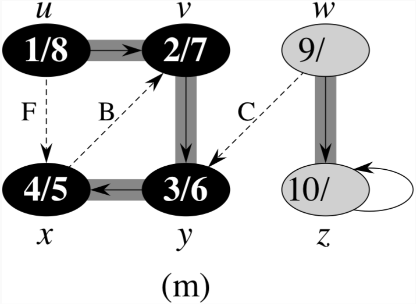

u
v
w
1/8
2/7
F
B
4/5
3/6
x
y
z
(j)



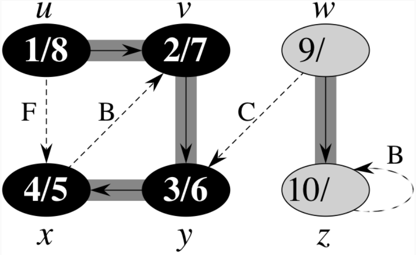
(k)



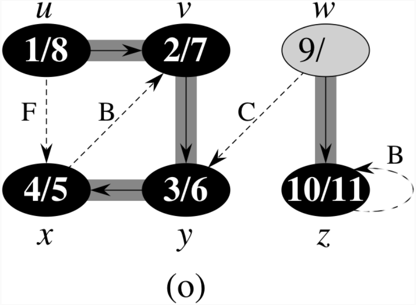
(l)


u
v
w
1/8
2/7
9/
F
B
C
4/5
3/6
10/
x
y
z
(m)

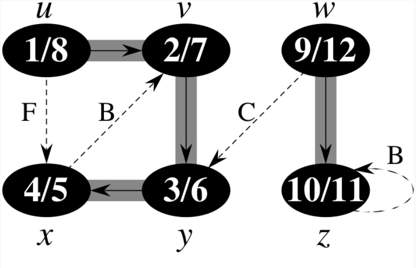
Exemplo de execução



(n)


u
v
w
1/8
2/7
9/
F
B
C
B
4/5
3/6
10/11
x
y
z
(o)

Exemplo de execução



(p)

Procedimento DFS

```
DFS(G)
1  for u ∈ G.V
2      u.cor = BRANCO
3      u.π = NIL
4  tempo = 0
5  for u ∈ G.V
6      if u.cor == BRANCO
7          DFS-VISIT(G, u)
```

```
DFS-VISIT(G, u)
1  tempo = tempo + 1
2  u.d = tempo
3  u.cor = CINZA
4  for v ∈ G.Adj[u]
5      if v.cor == BRANCO
6          v.π = u
7          DFS-VISIT(G, v)
8  u.cor = PRETO
9  tempo = tempo + 1
10 u.f = tempo
```

Tempo de execução

- Os laços nas linhas 1 a 3 e nas linhas 5 a 7 de DFS demoram tempo $\Theta(V)$, sem contar o tempo das chamadas a DFS-Visit
- O procedimento DFS-Visit é chamado exatamente uma vez para cada vértice, isto porque DFS-Visit é chamado para os vértices brancos, e no início de DFS-Visit o vértice é pintado de cinza
- Durante a execução de DFS-Visit(v), o laço nas linhas 4 a 7 é executado $G.Adj[v]$ vezes, como $\sum_{v \in V} |G.Adj[v]| = \Theta(E)$, o custo total da execução das linhas 4 a 7 de DFS-Visit é $\Theta(E)$
- Portanto, o tempo de execução do DFS é $\Theta(V + E)$

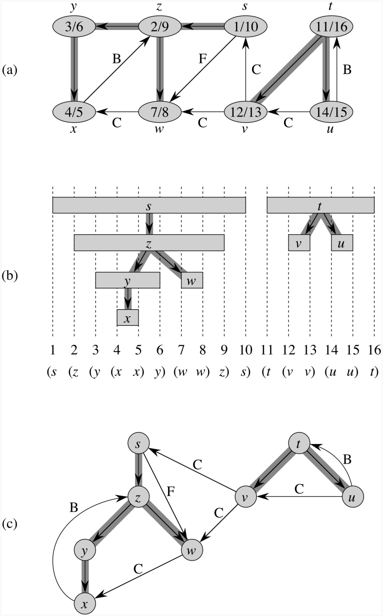
- O procedimento DFS constrói uma floresta da busca em profundidade (floresta DFS), contendo diversas árvores da busca em profundidade
- Para um grafo $G = (V, E)$, definimos o **subgrafo predecessor** de uma busca em profundidade de G como o grafo $G_\pi = (V, E_\pi)$ onde
    - $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V \text{ e } v.\pi \neq \text{NIL}\}$
- As arestas em E_π são **arestas da floresta**

Teorema 22.7 (Teorema do parênteses)
Para dois vértices quaisquer u e v, exatamente uma das três condições a seguir é verdadeira

- Os intervalos $[u.d, u.f]$ e $[v.d, v.f]$ são disjuntos e nem u e nem v são descendentes um do outro na floresta DFS
- O intervalo $[u.d, u.f]$ está contido inteiramente no intervalo $[v.d, v.f]$ e u é descendente de v em uma árvore DFS
- O intervalo $[v.d, v.f]$ está contido inteiramente no intervalo $[u.d, u.f]$ e v é descendente de u em uma árvore DFS

Prova feita em sala. Veja o livro para detalhes.

Propriedades



Podemos definir quadro tipos de arestas em termos da floresta G_π

- **Arestas de árvore**, são as arestas em G_π. Uma aresta (u, v) é uma aresta de árvore se v foi descoberto primeiro pela exploração da aresta (u, v)
- **Arestas de retorno** são as arestas (u, v) que conectam um vértice u a um ancestral v em uma árvore DFS (consideramos laços como arestas de retorno)
- **Arestas diretas** são as arestas (u, v) que não são arestas da árvore e conectam o vértice u a um descendente v em uma árvore DFS
- **Arestas cruzadas** são todas as outras arestas

Classificação das arestas

Quando uma aresta (u, v) é explorada, a cor do vértice v nos indica o tipo de aresta:

- BRANCO - aresta da árvore,
- CINZA - aresta de retorno, e
- PRETO - aresta direta ou cruzada

Classificação das arestas para grafos não orientados

Teorema 22.10
Na busca em profundidade de um grafo não orientado G, cada aresta de G ou é uma aresta de árvore ou uma aresta de retorno.

Prova feita em sala. Veja o livro para detalhes.

Referências

- Thomas H. Cormen et al. Introduction to Algorithms. 3rd edition. Capítulo 22.3.