Conceitos e definições

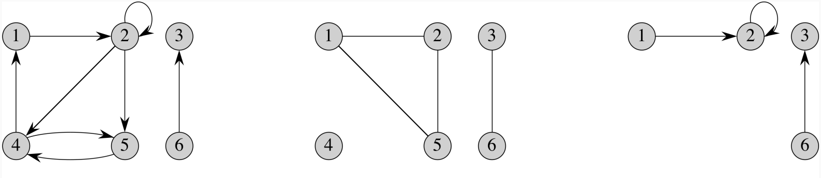
Marco A L Barbosa
malbarbo.pro.br

Departamento de Informática
Universidade Estadual de Maringá

- Um **grafo orientado** G é um par (V, E), onde
    - V é um conjunto finito, chamado de **conjunto de vértices**
    - E é um conjunto de pares ordenados de vértices, chamado de **conjunto de arestas**
- Em um **grafo não orientado** $G = (V, E)$, E consiste de pares de vértices não ordenados

Representação gráfica

- Os grafos podem ser representados graficamente
    - Os vértices são desenhados como círculos
    - As arestas são desenhadas como curvas ligando dois círculos, no caso de grafos orientados, as curvas tem um seta em uma das extremidades



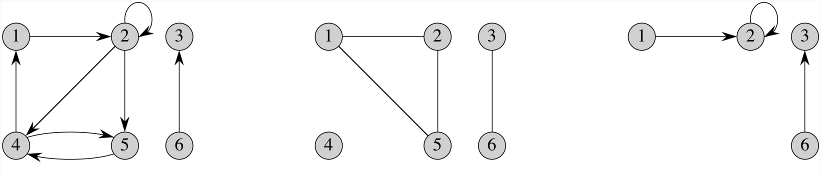
B-2

- Na figura B-2-a, qual é o conjunto de vértices e o conjunto de arestas?

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$E = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

- Na figura B-2-b, qual é o conjunto de vértices e o conjunto de arestas?

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$$

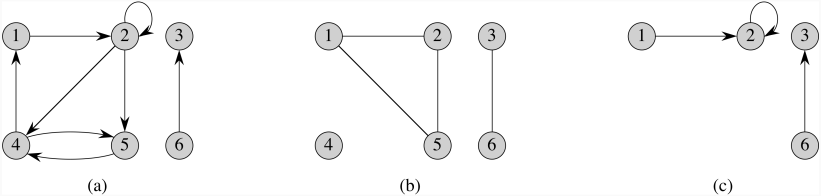


(a) (b) (c)

B-2

- Em grafos orientados são permitidos **laços** (arestas de um vértice para ele mesmo – *autoloop* em inglês). Exemplo: aresta $(2, 2)$ da figura B-2-a
- Um grafo orientado sem laços é chamado de **grafo simples**

Exemplos



B-2

- Em grafos não orientados os laços não são permitidos.
- Para grafos não orientados, definimos a convenção de utilizar (u, v) para denotar uma aresta, ao invés da notação de conjunto $\{u, v\}$. Dessa forma, (u, v) e (v, u) são consideradas a mesma aresta

- Para uma aresta (u, v) em um grafo orientado, dizemos que (u, v) é **incidente do** ou **sai do** vértice u e é **incidente no** ou **entra no** vértice v
- Quais as arestas que saem do vértice 2 na figura B-2-a?
  $(2, 2)$, $(2, 4)$ e $(2, 5)$
- Quais as arestas que entram no vértice 2 na figura B-2-a?
  $(1, 2)$ e $(2, 2)$

Incidência

- Para uma aresta (u, v) em um grafo não orientado, dizemos que (u, v) é **incidente** nos vértices u e v
- Quais são as arestas incidentes no vértice 2 da figura B-2-b?
  $(1, 2)$ e $(2, 5)$

- Para uma aresta (u, v), dizemos que o vértice v é **adjacente** ao vértice u
- Para grafos não orientados, a relação de adjacência é simétrica
- Se v é adjacente a u em um grafo orientado, escrevemos $u \rightarrow v$
- O vértice 1 é adjacente ao vértice 2 na figura B-2-b? Sim. E na figura B-2-a? Não, pois não existe a aresta $(2, 1)$

Grau

- Em um grafo orientado
  - O **grau de saída** de um vértice é o número de arestas que saem dele
  - O **grau de entrada** de um vértice é o número de arestas que entram nele
  - O **grau** de um vértice é soma do grau de saída e do grau de entrada
  - Na figura B-2-a, qual é o grau de entrada, o grau de saída e o grau do vértice 2?
    2, 3 e 5

- Em um grafo não orientado
    - O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes nele
    - Na figura B-2-b, qual é o grau do vértice 2?
      2

Grau

- Um vértice **isolado** tem grau 0
  - Existe algum vértice isolado nos grafos da figura B-2? Sim, o vértice 4 da figura B-2-b

- Um **caminho** de **comprimento** k de um vértice u até um vértice u' em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ de vértices tal que $u = v_0$, $u' = v_k$ e $(v_{i-1}, v_i) \in E$ para $i = 1, 2, \ldots, k$
- O comprimento do caminho é a quantidade de aresta no caminho
- O caminho **contém** os vértice $v_0, v_1, \ldots, v_k$ e as arestas $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$
- Se existe um caminho p de u até u', dizemos que u' é **acessível** a partir de u via p, ou $u \overset{p}{\leadsto} u'$ se o grafo é orientado
- Sempre existe um caminho de comprimento 0 de u para u
- Exemplos da figura B-2-a: $\langle 1, 2, 5, 4 \rangle$, $\langle 2, 5, 4, 5 \rangle$ e $\langle 3 \rangle$

- Um caminho é **simples** se todos os vértices no caminho são distintos
- Existe um caminho de tamanho 5 no grafo da figura B-2-a?
  Sim. Por exemplo, $\langle 1, 2, 5, 4, 1, 2 \rangle$
- Existe um caminho simples de tamanho 5 no grafo da figura B-2-a?
  Não

- Um **subcaminho** do caminho $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ é uma subsequência contígua de seus vértices

- Em um grafo orientado
  - Um caminho $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ forma um **ciclo** se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta
  - O ciclo é **simples** se além disso $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos
  - Dois caminhos $\langle v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_0 \rangle$ e $\langle v'_0, v'_1, \ldots, v'_{k-1}, v'_0 \rangle$ formam o mesmo ciclo se existe um inteiro j tal que $v'_i = v_{(i+j) \mod k}$ para $i = 0, 1, \ldots, k-1$
    - Considerando a figura B-2-a, dê dois caminhos que formam o mesmo ciclo que o caminho $\langle 1, 2, 4, 1 \rangle$
      $\langle 2, 4, 1, 2 \rangle$ e $\langle 4, 1, 2, 4 \rangle$

Caminhos e ciclos

- Em um grafo não orientado
  - Um caminho $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ forma um **ciclo** se $k > 0$, $v_0 = v_k$ e todas as arestas do caminho são distintas [1]
  - O ciclo é **simples** se $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos

[1]Esta definição é diferente em algumas versões do Cormen. Vamos considerar correta a definição que estamos apresentando aqui

- Um grafo sem ciclo é **acíclico**

Conectividade

- Um grafo não orientado é **conexo** [2] se cada vértice é acessível a partir de todos os outros
- Os **componentes conexos** de um grafo são as classes de equivalência de vértices sob a relação “é acessível a partir de”
  - Na figura B-2-b quais são os componentes conexos? $\{1, 2, 5\}$, $\{3, 6\}$ e $\{4\}$
- Um grafo não orientado é conexo se tem exatamente um componente conexo

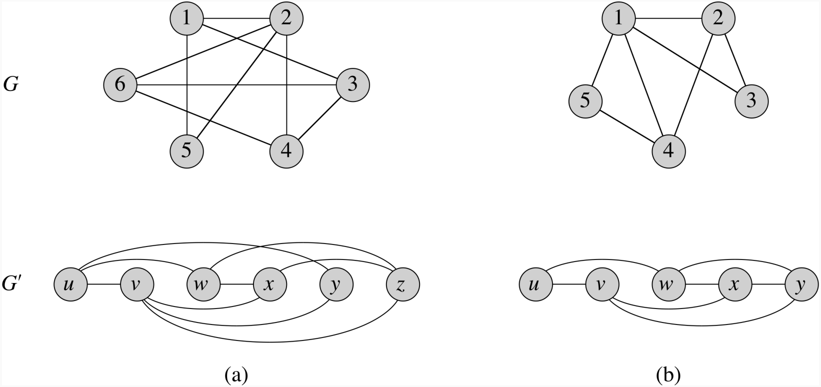
[2] conectado

Conectividade

- Um grafo orientado é **fortemente conexo** se para cada par de vértices (u, v), v é acessível a partir de u
- Os **componentes fortemente conexos** de um grafo orientado são as classes de equivalência de vértices sob a relação “são mutuamente acessíveis”
    - Quais os componentes fortemente conexos da figura B-2-a? $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{3\}$ e $\{6\}$
    - Todos os pares de vértices em $\{1, 2, 4, 5\}$ são mutuamente acessíveis
    - Os vértices $\{3, 6\}$ não formam um componente fortemente conexo. Por quê? O vértice 6 não é acessível a partir do vértice 3
- Um grafo orientado é fortemente conexo se ele só tem um componente fortemente conexo

- Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são **isomorfos** se existe uma bijeção $f : V \to V'$ tal que $(u, v) \in E$ se e somente se $(f(u), f(v)) \in E'$
    - Podemos identificar os vértices de G como vértices de G', mantendo as arestas correspondentes em G e G'

Isomorfismo



B-3

Isomorfismo

- Os grafos da figura B-3-a são isomorfos entre si?
    - $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y, z\}$
    - $|V| = 6$ e $|V'| = 6$; $|E| = 9$ e $|E'| = 9$
    - Mapeamento de V para V' dado pela função bijetora $f(1) = u, f(2) = v, f(3) = w, f(4) = x, f(5) = y, f(6) = z$
    - Sim, são isomorfos

- Os grafos da figura B-3-b, são isomorfos?
    - $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y\}$
    - $|V| = 5$ e $|V'| = 5$; $|E| = 7$ e $|E'| = 7$
    - G tem um vértice de grau 4, mas G' não tem
    - Não são isomorfos

Subgrafos

- $G' = (V', E')$ é um **subgrafo** de $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$
- Dado um conjunto V' de modo que $V' \subseteq V$, o subgrafo de G **induzido** por V' é o grafo $G' = (V', E')$, onde $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$
- Qual é o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 6\}$ na figura B-2-a?
  $G = (\{1, 2, 3, 6\}, \{(1, 2), (2, 2), (6, 3)\}$

- Dado um grafo não orientado $G = (V, E)$, a **versão orientada** de G é o grafo orientado $G' = (V, E')$, onde $(u, v) \in E'$ se e somente se $(u, v) \in E$
    - Cada aresta não orientada (u, v) em G é substituída na versão orientada pelas duas arestas orientadas (u, v) e (v, u)
    - Qual é a versão orientada do grafo da figura B-2-b?
      $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
      $E = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3)\}$

- Dado um grafo orientado $G = (V, E)$, a **versão não orientada** de G é o grafo não orientado $G' = (V, E')$, onde $(u, v) \in E'$ se e somente se $u \neq v$ e $(u, v) \in E$
  - A versão não orientada contém as arestas de G “com suas orientações removidas” e laços eliminados
  - Mesmo que o grafo orientado contenha as arestas (u, v) e (v, u), o grafo não orientado conterá (u, v) somente uma vez
  - Qual é a versão não orientada do grafo da figura B-2-a?
    $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
    $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 5)\}$

Vizinho

- Em um grafo orientado, um vizinho de um vértice u é qualquer vértice que seja adjacente a u na versão não orientada
  - v é **vizinho** de u se $(u, v) \in E$ ou $(v, u) \in E$
  - Na figura B-2-a, quais os vizinhos do vértice 2?
    $1, 4, 5$
- Em um grafo não orientado, u e v são vizinhos se são adjacentes

- **Grafo completo** é um grafo não orientado no qual todo par de vértices é adjacente
- Um grafo completo com n vértices é chamado de K_n
- Desenhe os grafos K_1, K_2, K_3, K_4, K_5

- **Grafo bipartido** é um grafo não orientado $G = (V, E)$ em que V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tais que $(u, v) \in E$ implica que $u \in V_1$ e $v \in V_2$ ou $u \in V_2$ e $v \in V_1$
    - Todas as arestas ficam entre os dois conjuntos V_1 e V_2
    - Dê um exemplo de um grafo bipartido

Árvores e florestas

- Um grafo conexo acíclico não orientado é uma **árvore**
    - Dê um exemplo de uma árvore
- Um grafo acíclico não orientado é uma **floresta**
    - Dê um exemplo de uma floresta
- Um grafo acíclico orientado é chamado de **GAO**
    - Dê um exemplo de um GAO

Variantes

- Semelhantes a grafos não orientados
    - **Multigrafo**: pode ter várias arestas entre vértices e também laços
    - **Hipergrafo**: cada **hiperaresta**, em lugar de conectar dois vértices, conecta um subconjunto arbitrário de vértices

Referências

- Thomas H. Cormen et al. Introduction to Algorithms. 3rd edition. Capítulo B.4.