Árvores geradores mínimas

Algoritmos em Grafos

Marco A L Barbosa

Conteúdo

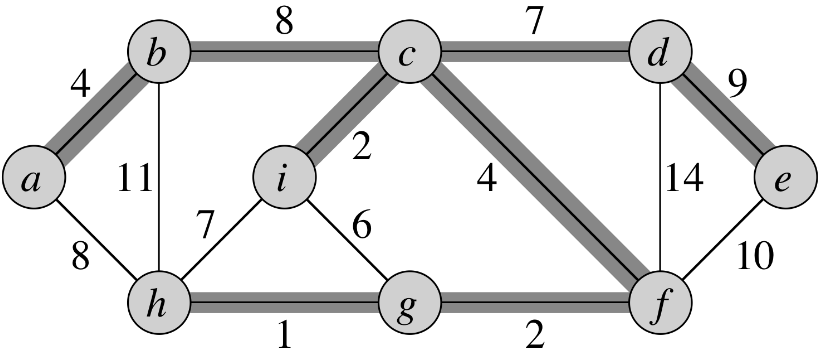
O estudo utilizando apenas este material **não é suficiente** para o entendimento do conteúdo. Recomendamos a leitura das referências no final deste material e a resolução (por parte do aluno) de todos os exercícios indicados.

Introdução

Introdução

- Dado um grafo conexo não orientado $G = (V, E)$ e uma função peso $w : E \rightarrow R$, queremos encontrar um subconjunto acíclico $T \subseteq E$ que conecte todos os vértices de G e cujo peso total $w(T) = \sum_{(u,v) \in T} w(u, v)$ seja minimizado
- Como T é acíclico e conecta todos os vértices, T forma uma árvore, que chamamos de **árvore geradora mínima** (MST)
- Chamamos o problema de determinar T de **problema da árvore geradora mínima**
- Veremos dois algoritmos gulosos para resolver este problema
  - Algoritmo de Kruskal
  - Algoritmo de Prim

Exemplo de árvore geradora mínima



- Propriedades de uma MST
  - Tem $|V| - 1$ arestas
  - Não tem ciclos
  - Pode não ser única

Como construir uma árvore geradora miníma

Como construir uma árvore geradora mínima

- Como construir uma árvore geradora mínima?

Como construir uma árvore geradora mínima

- Como construir uma árvore geradora mínima? Uma aresta de cada vez!

Como construir uma árvore geradora mínima

- Como construir uma árvore geradora mínima? Uma aresta de cada vez!
- Começamos com um conjunto vazio A

Como construir uma árvore geradora mínima

- Como construir uma árvore geradora mínima? Uma aresta de cada vez!
- Começamos com um conjunto vazio A
- Em cada etapa, determinamos um aresta (u, v) que pode ser adicionada a A, de forma a manter a seguinte invariante
  - Antes de cada iteração, A é um subconjunto de alguma árvore geradora mínima

Como construir uma árvore geradora mínima

- Como construir uma árvore geradora mínima? Uma aresta de cada vez!
- Começamos com um conjunto vazio A
- Em cada etapa, determinamos um aresta (u, v) que pode ser adicionada a A, de forma a manter a seguinte invariante
  - Antes de cada iteração, A é um subconjunto de alguma árvore geradora mínima
- A aresta (u, v) é chamada de **aresta segura** para A

Como construir uma árvore geradora mínima

- Como construir uma árvore geradora mínima? Uma aresta de cada vez!
- Começamos com um conjunto vazio A
- Em cada etapa, determinamos um aresta (u, v) que pode ser adicionada a A, de forma a manter a seguinte invariante
  - Antes de cada iteração, A é um subconjunto de alguma árvore geradora mínima
- A aresta (u, v) é chamada de **aresta segura** para A

`generic-mst(G, w)`
$A = \emptyset$
`while A` não forma uma árvore geradora
    encontre uma aresta (u, v) que seja segura para A
    $A = A \cup \{(u, v)\}$
`return` A

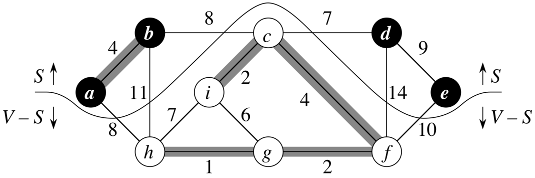
Como construir uma árvore geradora mínima

- Vamos fornecer uma regra para reconhecer arestas seguras, mas antes precisamos de algumas definições

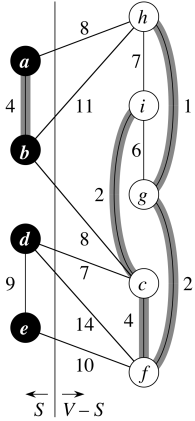
Como construir uma árvore geradora mínima

- Vamos fornecer uma regra para reconhecer arestas seguras, mas antes precisamos de algumas definições
- Seja $S \subset V$ e $A \subseteq E$
- Um **corte** $(S, V - S)$ de um grafo não orientado $G = (V, E)$ é uma partição de V
- Uma aresta $(u, v) \in E$ **cruza** o corte $(S, V - S)$ se um de seus extremos está em S e o outro em $V - S$
- Um corte **respeita** o conjunto A de arestas se nenhuma aresta em A cruza o corte
- Uma aresta é uma **aresta leve** cruzando um corte se seu peso é o mínimo de qualquer aresta que cruza o corte

Como construir uma árvore geradora mínima



(a)



(b)

Como construir uma árvore geradora mínima

- Teorema 23.1
  - Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo não orientado com uma função peso w de valor real definido em E. Seja A um subconjunto de E que está incluído em alguma árvore geradora mínima correspondente a G, seja $(S, V - S)$ qualquer corte de G que respeita A e seja (u, v) uma aresta leve cruzando $(S, V - S)$. Então a aresta (u, v) é segura para A.

Ideia da prova

- Seja T uma MST que inclui A
  - Se T contém (u, v), é claro que (u, v) é segura para A
  - Se T não contém (u, v), construímos outra MST T' que inclui $A \cup \{(u, v)\}$ (feito em sala, veja o livro)

Como construir uma árvore geradora mínima

- Corolário 23.2
  - Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo não orientado com uma função peso w de valor real definido em E. Seja A um subconjunto de E que está incluído em alguma árvore geradora mínima correspondente a G, e seja $C = (V_C, E_C)$ um componente conexo (árvore) na floresta $G_A = (V, A)$. Se (u, v) é uma aresta leve conectando C a algum outro componente em G_A, então (u, v) é segura para A.

Como construir uma árvore geradora mínima

- Corolário 23.2
  - Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo não orientado com uma função peso w de valor real definido em E. Seja A um subconjunto de E que está incluído em alguma árvore geradora mínima correspondente a G, e seja $C = (V_C, E_C)$ um componente conexo (árvore) na floresta $G_A = (V, A)$. Se (u, v) é uma aresta leve conectando C a algum outro componente em G_A, então (u, v) é segura para A.

- Prova
  - Tomamos $S = V_C$ no teorema 23.1

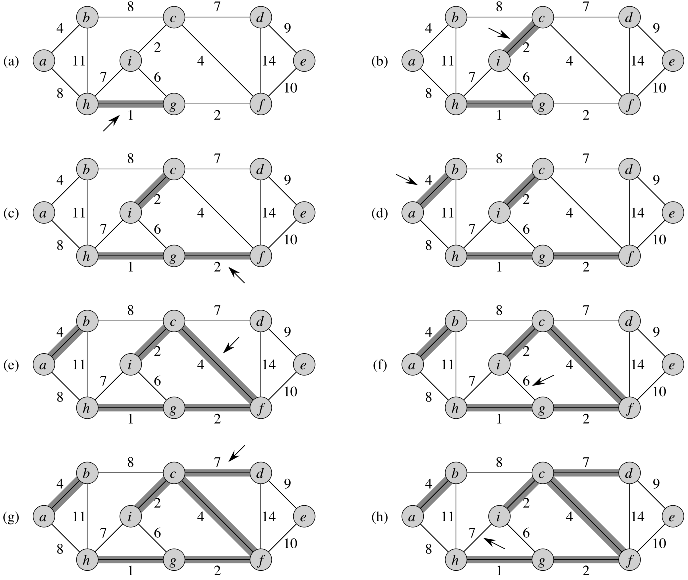
Algoritmos

Algoritmo de Kruskal

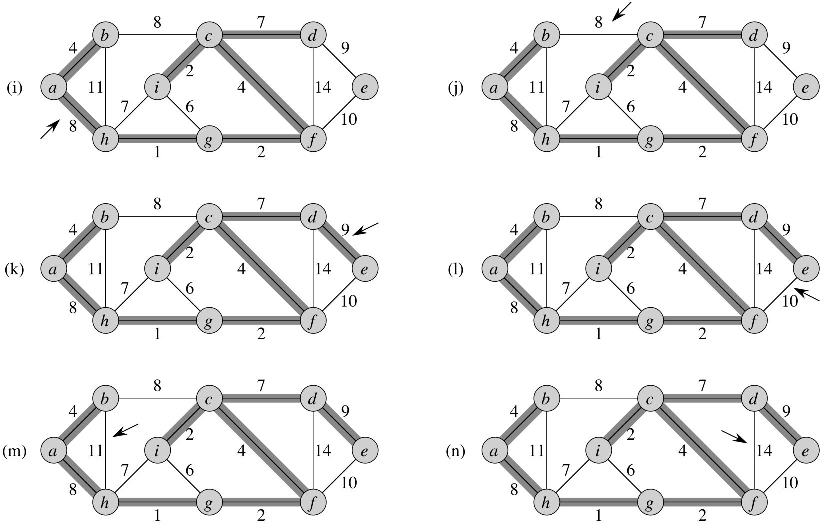
Algoritmo de Kruskal

- Baseia-se diretamente no algoritmo genérico apresentado
- Inicialmente cada vértice está em sua própria componente (árvore)
- De todas as arestas que conectam duas árvores quaisquer na floresta, uma aresta (u, v) de peso mínimo é escolhida. A aresta (u, v) é segura para alguma das duas árvores
- Utiliza uma estrutura de dados de conjuntos disjuntos
- Cada conjunto contém os vértices de uma árvore da floresta atual

Algoritmo de Kruskal



Algoritmo de Kruskal



Algoritmo de Kruskal

```
mst-kruskal(G, w)
A = 0
for cada vértice v em G.V
  make-set(v)
ordenar por peso as arestas de E
for cada aresta (u, v) em E, em ordem de peso
  if find-set(u) != find-set(v)
    A = A U {(u, v)}
    union(u, v)
return A
```

Análise do algoritmo de Kruskal

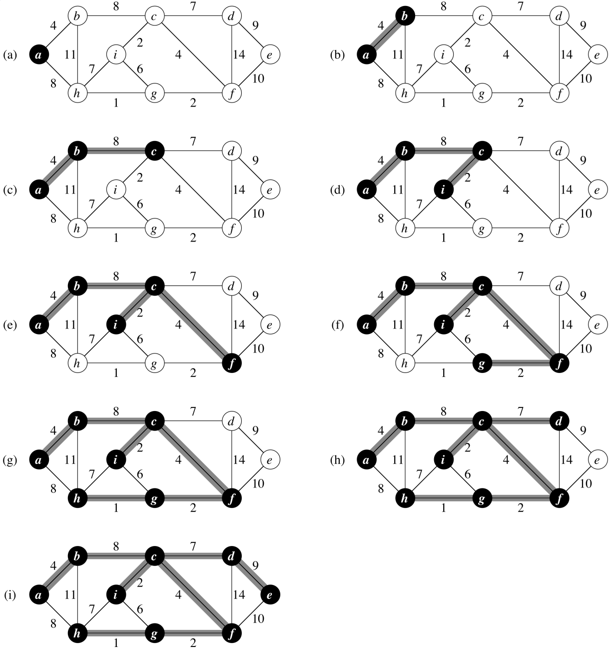
- A ordenação das arestas na linha 4 demora $O(E \lg E)$
- Operações com conjuntos disjuntos (depende da implementação, supomos a implementação da seção 21.3)
  - O laço das linhas 5 a 8 executa $O(E)$ `find-set` e `union`. Juntamente com as $|V|$ operações `make-set`, elas demoram $O((V + E)\alpha(V))$, onde α é uma função de crescimento muito lento
  - Pelo fato de G ser supostamente conexo, temos que $|E| \geq |V| - 1$, portanto o tempo com operações com conjuntos disjuntos é $O(E\alpha(V))$
  - Além disso, $\alpha(|V|) = O(\lg V) = O(\lg E)$, e portanto o tempo total das operações com conjuntos disjuntos é $O(E \lg E)$
- Somando o custo de ordenação e o custo das operações com conjuntos disjuntos, temos $O(E \lg E)$. Observando que $|E| < |V^2|$, temos que $\lg |E| = O(\lg V)$, e portanto, o tempo de execução do algoritmo é $O(E \lg V)$

Algoritmo de Prim

Algoritmo de Prim

- Baseia-se diretamente no algoritmo genérico apresentado
- As arestas do conjunto A formam uma única árvore
- A árvore começa com uma raiz arbitrária r e aumenta até alcançar todos os vértices em V
- Para cada vértice v, `v.chave` é o peso mínimo de qualquer aresta que conecta v a um vértice da árvore; $\texttt{v.chave} = \infty$ se não existe nenhuma aresta deste tipo
- Em cada passo, um vértice u com a menor chave é adicionado a árvore junto com a aresta $(u.pai, u)$
- A questão principal para implementar o algoritmo de Prim de forma eficiente é tornar fácil a seleção de uma nova aresta a ser adicionada à árvore

Algoritmo de Prim



Algoritmo de Prim

```
mst-prim(G, w, r)
for cada u em G.V
  u.chave = infinito
  u.pai = NIL
r.chave = 0
Q = G.V
while Q != 0
  u = extract-min(Q)
  for cada v em u.adj
    if v em Q e w(u, v) < v.chave
      v.pai = u
      v.chave = w(u, v)
```

Análise do algoritmo de Prim

- Depende de como a fila de prioridade é implementada
- Se a fila for implementada como um heap mínimo, o algoritmo `build-min-heap` é utilizado na inicialização nas linhas 1 a 5 no tempo $O(V)$
- O corpo do laço while é executado $|V|$ vezes, como cada operação `extract-min` demora $O(\lg V)$, o tempo total para todas as chamadas de `extract-min` é $O(V \lg V)$
- O laço for das linhas 8 a 11 é executado no total $O(E)$ vezes
- O teste de pertinência da linha 9 pode ser implementa em tempo constante
- A atribuição na linha 11 envolve uma operação implícita de `decrease-key`, que demora $O(\lg V)$, o tempo para todas as chamadas de `decrease-key` é $O(E \lg V)$
- Portanto, o tempo total do algoritmo é $(V \lg V + E \lg V) = O(E \lg V)$

Análise do algoritmo de Prim

- Se heap de Fibonacci for usando o tempo de execução assintótico pode ser melhorado
- `extract-min` é executado em tempo amortizado de $O(\lg V)$
- `decrease-key` é executado em tempo amortizado de $O(1)$
- Tempo total do algoritmo melhora para $O(E + V \lg V)$

Referências

Referências

- Thomas H. Cormen et al. Introduction to Algorithms. 3rd edition. Capítulo 23.