O estudo utilizando apenas este material **não é suficiente** para o entendimento do conteúdo. Recomendamos a leitura das referências no final deste material e a resolução (por parte do aluno) de todos os exercícios indicados.

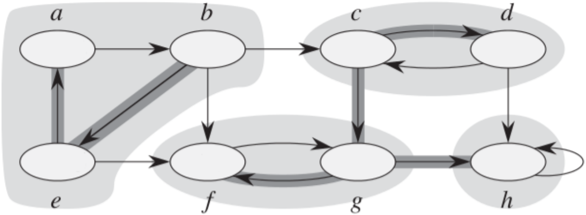
Grafos

Componentes fortemente conexos

Conteúdo

Introdução

- Um **componente fortemente conexo** (SCC) de um grafo orientado $G = (V, E)$ é um conjunto máximo de vértices $C \subseteq V$, tal que, para todo par de vértice u e v
  - $u \leadsto v$
  - $v \leadsto u$

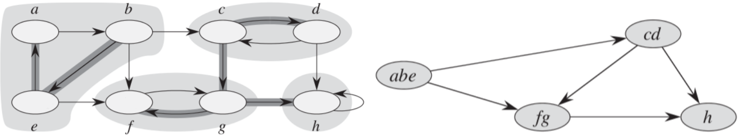


Componentes fortemente conexos

- O algoritmo para identificar componentes fortemente conexos utiliza o grafo transposto de G
  - $G^T = (V, E^T), E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$
  - G^T é G com todas as arestas invertidas
  - G^T pode ser calculado em tempo $\Theta(V + E)$ para a representação de lista de adjacências
  - G e G^T tem os mesmos SCC's
  - Veja o exercício 22.1-3

Grafo de componentes

- Grafo de componentes
  - $G^{\text{SCC}} = (V^{\text{SCC}}, E^{\text{SCC}})$
  - V^{SCC} tem um vértice para cada SCC em G
  - E^{SCC} contém uma aresta se existe uma aresta correspondente entre os SCC's de G



Grafo de componentes

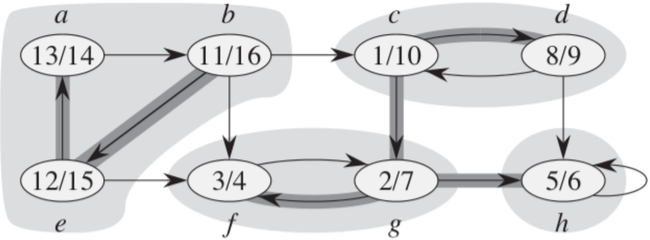
- Lema 22.13
  - G^{SCC} é um gao
  - Sejam C e C' SCC distintos em G, seja $u, v \in C$ e seja $u', v' \in C'$. Suponha que exista um caminho $u \rightsquigarrow u'$ em G. Então, não pode existir um caminho $v' \rightsquigarrow v$ em G
  - Prova: Suponha que exista um caminho $v' \rightsquigarrow v$ em G. Então existem caminhos $u \rightsquigarrow u' \rightsquigarrow v'$ e $v' \rightsquigarrow v \rightsquigarrow u$ em G. Portanto, u e v' são acessíveis um a partir do outro, e não podem estar em SCC separados

Procedimento `strongly-connected-components`

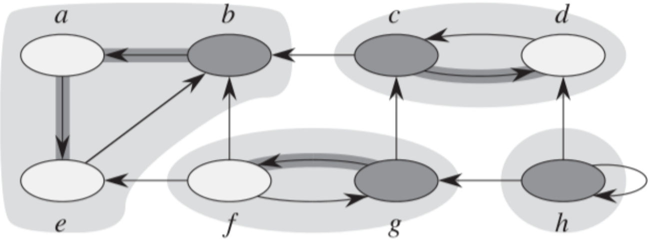
```
strongly-connected-components(G)
1 chamar DFS(G) para calcular o tempo de término u.f
  para cada vértice u
2 calcular GT
3 chamar DFS(GT) mas, no laço principal de DFS,
  considerar os vértices em ordem decrescente
  de u.f
4 os vértices de cada árvore na floresta primeiro
  na profundidade formada na linha 3 formam um
  componente fortemente conexo
```

Exemplo de execução

(a)



(b)



Análise do tempo de execução do `strongly-connected-components`

- O tempo do `dfs` das linhas 1 e 3 é $\Theta(V + E)$
- Conforme os vértices são terminados na chamada do `dfs` da linha 1, os vértices são inseridos na frente de uma lista ligada ($O(1)$), como cada vértice é inserido apenas uma vez, o tempo total de operações de inserções é $\Theta(V)$
- O tempo para calcular o grafo transposto na linha 2 é $\Theta(V + E)$
- Portanto, o tempo de execução do algoritmo é $\Theta(V + E)$

Corretude do `strongly-connected-components`

- Ideia
  - Considerando os vértices na segunda execução do DFS na ordem decrescente dos tempos de términos obtidos na primeira execução do DFS, estamos visitando os vértices do grafo de componentes na ordem topológica
- Vamos definir duas questões de notação
  - As referências a $u.d$ e $u.f$ se referem aos valores do primeiro DFS
  - Para um conjunto $U \subseteq V$, definimos
    - $d(U) = \min_{u \in U}\{u.d\}$ (tempo de descoberta mais antigo)
    - $f(U) = \max_{u \in U}\{u.f\}$ (tempo de término mais recente)

Corretude do `strongly-connected-components`

- Lema 22.14
  - Sejam C e C' SCC distintos em $G = (V, E)$. Suponha que exista uma aresta $(u, v) \in E$, tal que $u \in C$ e $v \in C'$. Então $f(C) > f(C')$
- Corolário 22.15
  - Sejam C e C' SCC distintos em $G = (V, E)$. Suponha que exista uma aresta $(u, v) \in E^T$, tal que $u \in C$ e $v \in C'$. Então $f(C) < f(C')$

Corretude do `strongly-connected-components`

- Teorema 22.16: `strongly-connected-components(G)` calcula corretamente os SCC de um grafo orientado G
  - A segunda DFS, começa com um SCC C tal que $f(C)$ é máximo
  - Seja $x \in C$ o vértice inicial, a segunda DFS visita todos os vértices de C. Pelo corolário, como $f(C) > f(C')$ para todo $C \neq C'$, não existe aresta de C para C'. Logo, a DFS visita apenas os vértices de C (descobrindo este SCC)
  - A próxima raiz escolhida na segunda DFS está em um SCC C' tal que $f(C')$ é máximo em relação a todos os outros SCC (sem considerar C). A DFS visita todos os vértices de C', e as únicas arestas fora de C' vão para C, cujo os vértices já foram visitados
  - O processo continua até que todos os vértices sejam visitados
  - Cada vez que uma raiz é escolhida pelo segunda DFS, ele só pode alcançar
    - vértices no SCC dele (através de arestas da árvore)
    - vértices que já foram visitados na segunda DFS

Exercícios

- 22.5-1 a 22.5-7

Exercícios

22.5-1 De que maneira o número de componentes fortemente conexos de um grafo se altera se uma nova aresta é adicionada?

22.5-2 Mostre como o procedimento `strongly-connected-components` funciona sobre o grafo da figura 22.6. Especificamente, mostre os tempos de término calculados na linha 1 e a floresta produzida na linha 3. Suponha que o laço das linhas de 5 a 7 de dfs considere os vértices em ordem alfabética e que as listas de adjacências estejam em ordem alfabética.

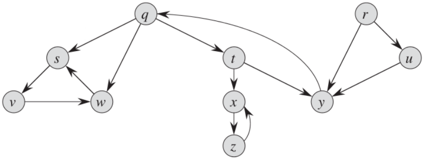


Figure 22.6 A directed graph for use in Exercises 22.3-2 and 22.5-2.

Exercícios

22.5-3 O professor Bacon afirma que o algoritmo para componentes fortemente conexos pode ser simplificado pelo uso do grafo original (em lugar do transposto) na segunda chamada do `dfs` e pela varredura dos vértices na ordem crescente dos tempos de término. Este algoritmo sempre produz resultados corretos?

22.5-4 Prove que para qualquer grafo orientado G, temos $((G^T)^{SCC})^T = G^{SCC}$. Isto é, a transposta do grafo de componentes de G^T é igual ao grafo de componentes de G.

Exercícios

22.5-5 Forneça um algoritmo de tempo $O(V + E)$ para calcular o grafo de componentes de um grafo orientado $G(V, E)$. Certifique-se de que existe no máximo uma aresta entre dois vértices no grafo de componentes que o seu algoritmo produz.

22.5-6 Dado um grafo orientado $G = (V, E)$, explique como criar outro grafo $G' = (V, E')$ tal que, G' tenha os mesmos componentes fortemente conexos que G, G' tenha o mesmo grafo de componentes que G e E' seja tão pequeno quanto possível. Descreva um algoritmo rápido para calcular G'.

Exercícios

22.5-7 Um grafo orientado $G = (V, E)$ é **semiconexo** se, para todos os pares de vértice $u, v \in V$, temos $u \leadsto v$ ou $v \leadsto u$. Forneça um algoritmo eficiente para determinar se G é ou não semiconexo. Prove que seu algoritmo é correto e analise o seu tempo de execução.

Referências

- Thomas H. Cormen et al. Introduction to Algorithms. 3rd edition. Capítulo 22.5.