O estudo utilizando apenas este material **não é suficiente** para o entendimento do conteúdo. Recomendamos a leitura das referências no final deste material e a resolução (por parte do aluno) de todos os exercícios indicados.

Grafos

Histórico, definições e propriedades

Conteúdo

Histórico

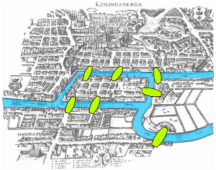
- Em 1736 Leonhard Euler propôs e resolveu o problema das sete pontes de Königsberg
- A cidade de Königsberg era cortada por um rio que continha duas ilhas
- Existiam 7 pontes que ligavam as ilhas e as margens do rios
- O problema consistia em encontrar um caminho que cruzasse cada uma das 7 pontes uma única vez
- Existe tal caminho?

Histórico

- Euler formulou o problema em termos abstratos

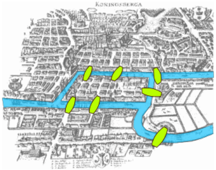
Histórico

- Euler formulou o problema em termos abstratos

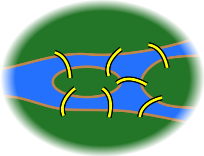


Histórico

- Euler formulou o problema em termos abstratos

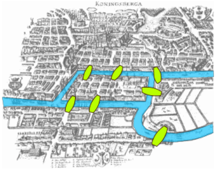


$\rightarrow$

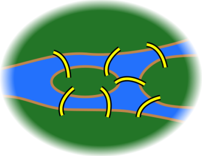


Histórico

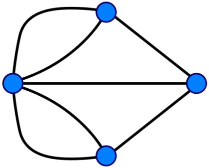
- Euler formulou o problema em termos abstratos



$\rightarrow$



$\rightarrow$



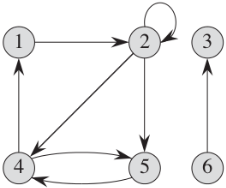
Histórico

- Euler observou que toda vez que alguém atinge uma porção de terra por uma ponte, deve deixar a porção de terra também por uma ponte
- Para que cada ponte fosse cruzada apenas uma vez, todas as porcões de terra, exceto talvez a inicial e a final, deveriam ter um número par de pontes ligadas a ela
- Mas todas as porções de terra do problema tem um número ímpar de pontes
- Com esta observação, Euler mostrou que não é possível fazer o percurso
- Surgiu a área da matemática que é conhecida como Teoria dos Grafos

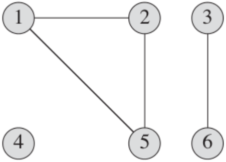
Definições e propriedades

- Um **grafo orientado** G é um par (V, E), onde
  - V é um conjunto finito, chamado de **conjunto de vértices**
  - E é uma relação binária em V, chamado de **conjunto de arestas**
- Em um **grafo não orientado** $G = (V, E)$, E consiste de pares de vértices não ordenados
- Os grafos podem ser representados graficamente
  - Os vértices são desenhados como círculos
  - As arestas são desenhadas como curvas ligando dois círculos, no caso de grafos orientados, as curvas tem um seta em uma das extremidades

Definições e propriedades

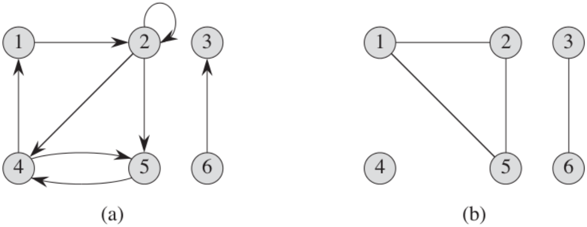


(a)



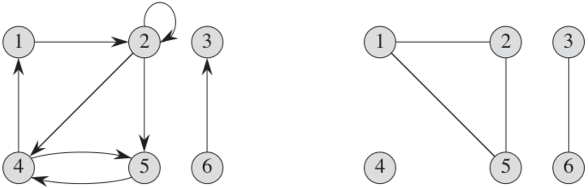
(b)

Definições e propriedades



- Na figura a, qual é o conjunto de vértices e o conjunto de arestas?

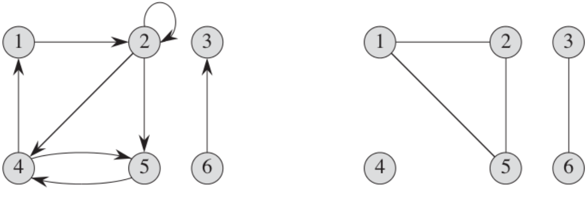
Definições e propriedades



(a) (b)

- Na figura a, qual é o conjunto de vértices e o conjunto de arestas?
  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
  $E = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$

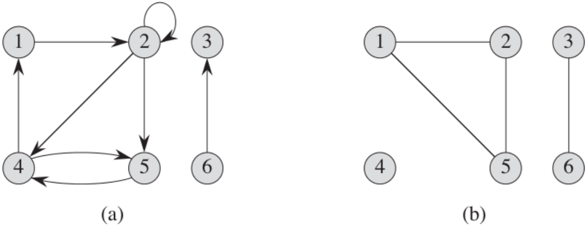
Definições e propriedades



(a) (b)

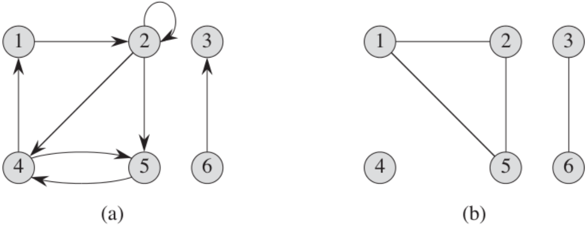
- Na figura a, qual é o conjunto de vértices e o conjunto de arestas?
  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
  $E = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$
- Na figura b, qual é o conjunto de vértices e o conjunto de arestas?

Definições e propriedades



- Na figura a, qual é o conjunto de vértices e o conjunto de arestas?
  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
  $E = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$
- Na figura b, qual é o conjunto de vértices e o conjunto de arestas?
  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$

Definições e propriedades



- Observações
  - Em grafos orientados são permitidos **autoloops** (arestas de um vértice para ele mesmo). Exemplo: aresta $(2, 2)$
  - Um grafo orientado sem autoloops é chamado de **grafo simples**
  - Em grafos não orientados, autoloops não são permitidos
  - Para grafos não orientados, definimos a convenção de utilizar (u, v) para uma aresta, ao invés da notação de conjunto $\{u, v\}$. (u, v) e (v, u) são consideradas a mesma aresta

Definições e propriedades

- Para uma aresta (u, v) em um grafo orientado, dizemos que
  - (u, v) é **incidente do** ou **sai do** vértice u e é **incidente no** ou **entra no** vértice v

Definições e propriedades

- Para uma aresta (u, v) em um grafo orientado, dizemos que
  - (u, v) é **incidente do** ou **sai do** vértice u e é **incidente no** ou **entra no** vértice v
  - Quais as arestas que saem do vértice 2 na figura a?

Definições e propriedades

- Para uma aresta (u, v) em um grafo orientado, dizemos que
  - (u, v) é **incidente do** ou **sai do** vértice u e é **incidente no** ou **entra no** vértice v
  - Quais as arestas que saem do vértice 2 na figura a?
    $(2, 2), (2, 4)$ e $(2, 5)$

Definições e propriedades

- Para uma aresta (u, v) em um grafo orientado, dizemos que
  - (u, v) é **incidente do** ou **sai do** vértice u e é **incidente no** ou **entra no** vértice v
  - Quais as arestas que saem do vértice 2 na figura a?
    $(2, 2), (2, 4)$ e $(2, 5)$
  - Quais as arestas que entram no vértice 2 na figura a?

Definições e propriedades

- Para uma aresta (u, v) em um grafo orientado, dizemos que
  - (u, v) é **incidente do** ou **sai do** vértice u e é **incidente no** ou **entra no** vértice v
  - Quais as arestas que saem do vértice 2 na figura a? $(2, 2), (2, 4)$ e $(2, 5)$
  - Quais as arestas que entram no vértice 2 na figura a? $(1, 2)$ e $(2, 2)$

Definições e propriedades

- Para uma aresta (u, v) em um grafo orientado, dizemos que
  - (u, v) é **incidente do** ou **sai do** vértice u e é **incidente no** ou **entra no** vértice v
  - Quais as arestas que saem do vértice 2 na figura a? $(2, 2), (2, 4)$ e $(2, 5)$
  - Quais as arestas que entram no vértice 2 na figura a? $(1, 2)$ e $(2, 2)$
- Para uma aresta (u, v) em um grafo não orientado, dizemos que
  - (u, v) é **incidente** nos vértices u e v

Definições e propriedades

- Para uma aresta (u, v) em um grafo orientado, dizemos que
  - (u, v) é **incidente do** ou **sai do** vértice u e é **incidente no** ou **entra no** vértice v
  - Quais as arestas que saem do vértice 2 na figura a? $(2, 2), (2, 4)$ e $(2, 5)$
  - Quais as arestas que entram no vértice 2 na figura a? $(1, 2)$ e $(2, 2)$
- Para uma aresta (u, v) em um grafo não orientado, dizemos que
  - (u, v) é **incidente** nos vértices u e v
  - Quais são as arestas incidentes no vértice 2 da figura b?

Definições e propriedades

- Para uma aresta (u, v) em um grafo orientado, dizemos que
  - (u, v) é **incidente do** ou **sai do** vértice u e é **incidente no** ou **entra no** vértice v
  - Quais as arestas que saem do vértice 2 na figura a? $(2, 2), (2, 4)$ e $(2, 5)$
  - Quais as arestas que entram no vértice 2 na figura a? $(1, 2)$ e $(2, 2)$
- Para uma aresta (u, v) em um grafo não orientado, dizemos que
  - (u, v) é **incidente** nos vértices u e v
  - Quais são as arestas incidentes no vértice 2 da figura b? $(1, 2)$ e $(2, 5)$

Definições e propriedades

- Para uma aresta (u, v), dizemos que o vértice v é **adjacente** ao vértice u
- Para grafos não orientados, a relação de adjacência é simétrica
- Se v é adjacente a u em um grafo orientado, escrevemos $u \to v$

Definições e propriedades

- Para uma aresta (u, v), dizemos que o vértice v é **adjacente** ao vértice u
- Para grafos não orientados, a relação de adjacência é simétrica
- Se v é adjacente a u em um grafo orientado, escrevemos $u \to v$
- O vértice 1 é adjacente ao vértice 2 na figura b? E na figura a?

Definições e propriedades

- Para uma aresta (u, v), dizemos que o vértice v é **adjacente** ao vértice u
- Para grafos não orientados, a relação de adjacência é simétrica
- Se v é adjacente a u em um grafo orientado, escrevemos $u \to v$
- O vértice 1 é adjacente ao vértice 2 na figura b? E na figura a? Sim. Não, pois não existe a aresta $(2, 1)$

Definições e propriedades

- Em um grafo não orientado
  - O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes nele

Definições e propriedades

- Em um grafo não orientado
  - O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes nele
  - Na figura b, qual é o grau do vértice 2?

Definições e propriedades

- Em um grafo não orientado
  - O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes nele
  - Na figura b, qual é o grau do vértice 2? 2

Definições e propriedades

- Em um grafo não orientado
  - O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes nele
  - Na figura b, qual é o grau do vértice 2? 2
  - Um vértice **isolado** tem grau 0

Definições e propriedades

- Em um grafo não orientado
  - O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes nele
  - Na figura b, qual é o grau do vértice 2? 2
  - Um vértice **isolado** tem grau 0
  - Existe algum vértice isolado nos grafos da figura a e b?

Definições e propriedades

- Em um grafo não orientado
  - O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes nele
  - Na figura b, qual é o grau do vértice 2? 2
  - Um vértice **isolado** tem grau 0
  - Existe algum vértice isolado nos grafos da figura a e b? Sim, o vértice 4 da figura b

Definições e propriedades

- Em um grafo não orientado
  - O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes nele
  - Na figura b, qual é o grau do vértice 2? 2
  - Um vértice **isolado** tem grau 0
  - Existe algum vértice isolado nos grafos da figura a e b? Sim, o vértice 4 da figura b
- Em um grafo orientado
  - O **grau de saída** de um vértice é o número de arestas que saem dele
  - O **grau de entrada** de um vértice é o número de arestas que entram nele
  - O **grau** de um vértice é soma do grau de saída e do grau de entrada

Definições e propriedades

- Em um grafo não orientado
  - O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes nele
  - Na figura b, qual é o grau do vértice 2? 2
  - Um vértice **isolado** tem grau 0
  - Existe algum vértice isolado nos grafos da figura a e b? Sim, o vértice 4 da figura b
- Em um grafo orientado
  - O **grau de saída** de um vértice é o número de arestas que saem dele
  - O **grau de entrada** de um vértice é o número de arestas que entram nele
  - O **grau** de um vértice é soma do grau de saída e do grau de entrada
  - Na figura a, qual é o grau de entrada, o grau de saída e o grau do vértice 2?

Definições e propriedades

- Em um grafo não orientado
  - O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes nele
  - Na figura b, qual é o grau do vértice 2? 2
  - Um vértice **isolado** tem grau 0
  - Existe algum vértice isolado nos grafos da figura a e b? Sim, o vértice 4 da figura b
- Em um grafo orientado
  - O **grau de saída** de um vértice é o número de arestas que saem dele
  - O **grau de entrada** de um vértice é o número de arestas que entram nele
  - O **grau** de um vértice é soma do grau de saída e do grau de entrada
  - Na figura a, qual é o grau de entrada, o grau de saída e o grau do vértice 2? 2, 3 e 5

Caminhos e ciclos

- Um **caminho** de **comprimento k** de um vértice u até um vértice u' em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ de vértices tal que $u = v_0$, $u' = v_k$ e $(v_{i-1}, v_i) \in E$ para $i = 1, 2, \ldots, k$
- O comprimento do caminho é a quantidade de aresta no caminho
- O caminho **contém** os vértice $v_0, v_1, \ldots, v_k$ e as arestas $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$
- Sempre existe um caminho de comprimento 0 de u para u
- Exemplos da figura a: $\langle 1, 2, 5, 4 \rangle$, $\langle 2, 5, 4, 5 \rangle$, $\langle 1 \rangle$

Caminhos e ciclos

- Se existe um caminho p de u até u', dizemos que u' é **acessível** a partir de u via p, ou $u \overset{p}{\rightsquigarrow} u'$ se o grafo é orientado

Caminhos e ciclos

- Se existe um caminho p de u até u', dizemos que u' é **acessível** a partir de u via p, ou $u \overset{p}{\leadsto} u'$ se o grafo é orientado
- Quais são os vértices acessíveis a partir do vértice 1?

Caminhos e ciclos

- Se existe um caminho p de u até u', dizemos que u' é **acessível** a partir de u via p, ou $u \overset{p}{\rightsquigarrow} u'$ se o grafo é orientado
- Quais são os vértices acessíveis a partir do vértice 1? Figura a: 1, 2, 5 e 4, figura b: 1, 2 e 5

Caminhos e ciclos

- Um caminho é **simples** se todos os vértices no caminho são distintos

Caminhos e ciclos

- Um caminho é **simples** se todos os vértices no caminho são distintos
- Existem um caminho de tamanho 5 no grafo da figura a?

Caminhos e ciclos

- Um caminho é **simples** se todos os vértices no caminho são distintos
- Existem um caminho de tamanho 5 no grafo da figura a?
  Sim. $\langle 2, 4, 5, 4, 1, 2 \rangle$

Caminhos e ciclos

- Um caminho é **simples** se todos os vértices no caminho são distintos
- Existem um caminho de tamanho 5 no grafo da figura a?
  Sim. $\langle 2, 4, 5, 4, 1, 2 \rangle$
- Existem um caminho simples de tamanho 5 no grafo da figura a?

Caminhos e ciclos

- Um caminho é **simples** se todos os vértices no caminho são distintos
- Existem um caminho de tamanho 5 no grafo da figura a? Sim. $\langle 2, 4, 5, 4, 1, 2 \rangle$
- Existem um caminho simples de tamanho 5 no grafo da figura a? Não

Caminhos e ciclos

- Um **subcaminho** do caminho $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ é uma subsequência contígua de seus vértices
- Em um grafo orientado
  - Um caminho $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ forma um **ciclo** se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta
  - O ciclo é **simples** se além disso $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos
  - Dois caminhos $\langle v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_0 \rangle$ e $\langle v'_0, v'_1, \ldots, v'_{k-1}, v'_0 \rangle$ formam o mesmo ciclo se existe um inteiro j tal que $v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$ para $i = 0, 1, \ldots, k-1$

Caminhos e ciclos

- Um **subcaminho** do caminho $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ é uma subsequência contígua de seus vértices
- Em um grafo orientado
  - Um caminho $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ forma um **ciclo** se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta
  - O ciclo é **simples** se além disso $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos
  - Dois caminhos $\langle v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_0 \rangle$ e $\langle v'_0, v'_1, \ldots, v'_{k-1}, v'_0 \rangle$ formam o mesmo ciclo se existe um inteiro j tal que $v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$ para $i = 0, 1, \ldots, k-1$
    - Considerando a figura a, dê dois caminhos que formam o mesmo ciclo que o caminho $\langle 1, 2, 4, 1 \rangle$.

Caminhos e ciclos

- Um **subcaminho** do caminho $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ é uma subsequência contígua de seus vértices
- Em um grafo orientado
  - Um caminho $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ forma um **ciclo** se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta
  - O ciclo é **simples** se além disso $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos
  - Dois caminhos $\langle v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_0 \rangle$ e $\langle v'_0, v'_1, \ldots, v'_{k-1}, v'_0 \rangle$ formam o mesmo ciclo se existe um inteiro j tal que $v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$ para $i = 0, 1, \ldots, k-1$
    - Considerando a figura a, dê dois caminhos que formam o mesmo ciclo que o caminho $\langle 1, 2, 4, 1 \rangle$. $\langle 2, 4, 1, 2 \rangle$ e $\langle 4, 1, 2, 4 \rangle$

Caminhos e ciclos

- Em um grafo não orientado
  - Um caminho $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ forma um **ciclo** se $k \geq 3$ e $v_0 = v_k$
  - O ciclo é **simples** se $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos
- Um grafo sem ciclo é **acíclico**

Conexidade

- Um grafo não orientado é **conexo** se cada vértice é acessível a partir de todos os outros

Conexidade

- Um grafo não orientado é **conexo** se cada vértice é acessível a partir de todos os outros
- Os **componentes conexos** de um grafo são as classes de equivalência de vértices sob a relação "é acessível a partir de"

Conexidade

- Um grafo não orientado é **conexo** se cada vértice é acessível a partir de todos os outros
- Os **componentes conexos** de um grafo são as classes de equivalência de vértices sob a relação “é acessível a partir de”
  - Na figura b quais são os componentes conexos?

Conexidade

- Um grafo não orientado é **conexo** se cada vértice é acessível a partir de todos os outros
- Os **componentes conexos** de um grafo são as classes de equivalência de vértices sob a relação “é acessível a partir de”
    - Na figura b quais são os componentes conexos? $\{1, 2, 5\}$, $\{3, 6\}$

Conexidade

- Um grafo não orientado é **conexo** se cada vértice é acessível a partir de todos os outros
- Os **componentes conexos** de um grafo são as classes de equivalência de vértices sob a relação "é acessível a partir de"
  - Na figura b quais são os componentes conexos? $\{1, 2, 5\}$, $\{3, 6\}$ e $\{4\}$

Conexidade

- Um grafo não orientado é **conexo** se cada vértice é acessível a partir de todos os outros
- Os **componentes conexos** de um grafo são as classes de equivalência de vértices sob a relação "é acessível a partir de"
  - Na figura b quais são os componentes conexos? $\{1, 2, 5\}$, $\{3, 6\}$ e $\{4\}$
- Um grafo não orientado é conexo se tem exatamente um componente conexo

Conexidade

- Um grafo orientado é **fortemente conexo** se para cada par de vértices (u, v), v é acessível a partir de u
- Os **componentes fortemente conexos** de um grafo orientado são as classes de equivalência de vértices sob a relação "são mutuamente acessíveis"

Conexidade

- Um grafo orientado é **fortemente conexo** se para cada par de vértices (u, v), v é acessível a partir de u
- Os **componentes fortemente conexos** de um grafo orientado são as classes de equivalência de vértices sob a relação "são mutuamente acessíveis"
- Um grafo orientado é fortemente conexo se ele só tem um componente fortemente conexo

Conexidade

- Um grafo orientado é **fortemente conexo** se para cada par de vértices (u, v), v é acessível a partir de u
- Os **componentes fortemente conexos** de um grafo orientado são as classes de equivalência de vértices sob a relação "são mutuamente acessíveis"
- Um grafo orientado é fortemente conexo se ele só tem um componente fortemente conexo
  - Quais os componentes fortemente conexos da figura a?

Conexidade

- Um grafo orientado é **fortemente conexo** se para cada par de vértices (u, v), v é acessível a partir de u
- Os **componentes fortemente conexos** de um grafo orientado são as classes de equivalência de vértices sob a relação "são mutuamente acessíveis"
- Um grafo orientado é fortemente conexo se ele só tem um componente fortemente conexo
  - Quais os componentes fortemente conexos da figura a? $\{1, 2, 4, 5\}$

Conexidade

- Um grafo orientado é **fortemente conexo** se para cada par de vértices (u, v), v é acessível a partir de u
- Os **componentes fortemente conexos** de um grafo orientado são as classes de equivalência de vértices sob a relação "são mutuamente acessíveis"
- Um grafo orientado é fortemente conexo se ele só tem um componente fortemente conexo
  - Quais os componentes fortemente conexos da figura a?
    $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{3\}$ e $\{6\}$

Conexidade

- Um grafo orientado é **fortemente conexo** se para cada par de vértices (u, v), v é acessível a partir de u
- Os **componentes fortemente conexos** de um grafo orientado são as classes de equivalência de vértices sob a relação "são mutuamente acessíveis"
- Um grafo orientado é fortemente conexo se ele só tem um componente fortemente conexo
  - Quais os componentes fortemente conexos da figura a? $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{3\}$ e $\{6\}$
  - Todos os pares de vértices em $\{1, 2, 4, 5\}$ são mutuamente acessíveis

Conexidade

- Um grafo orientado é **fortemente conexo** se para cada par de vértices (u, v), v é acessível a partir de u
- Os **componentes fortemente conexos** de um grafo orientado são as classes de equivalência de vértices sob a relação "são mutuamente acessíveis"
- Um grafo orientado é fortemente conexo se ele só tem um componente fortemente conexo
  - Quais os componentes fortemente conexos da figura a? $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{3\}$ e $\{6\}$
  - Todos os pares de vértices em $\{1, 2, 4, 5\}$ são mutuamente acessíveis
  - Os vértices $\{3, 6\}$ não formam um componente fortemente conexo. Por quê?

Conexidade

- Um grafo orientado é **fortemente conexo** se para cada par de vértices (u, v), v é acessível a partir de u
- Os **componentes fortemente conexos** de um grafo orientado são as classes de equivalência de vértices sob a relação "são mutuamente acessíveis"
- Um grafo orientado é fortemente conexo se ele só tem um componente fortemente conexo
  - Quais os componentes fortemente conexos da figura a? $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{3\}$ e $\{6\}$
  - Todos os pares de vértices em $\{1, 2, 4, 5\}$ são mutuamente acessíveis
  - Os vértices $\{3, 6\}$ não formam um componente fortemente conexo. Por quê? O vértice 6 não pode ser acessado a partir do vértice 3

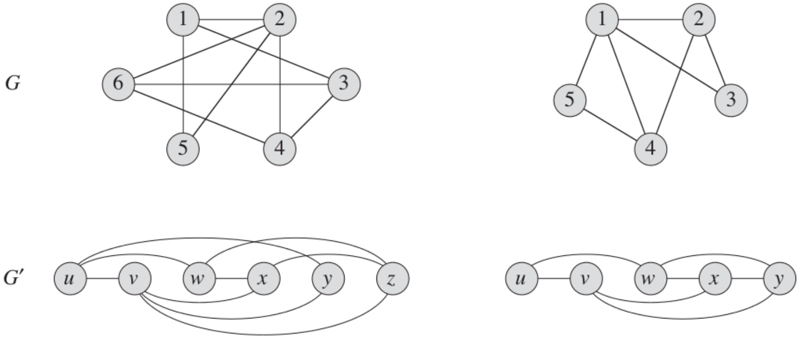
Isomorfismo

- Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são **isomorfos** se existe uma bijeção $f : V \to V'$ tal que $(u, v) \in E$ se e somente se $(f(u), f(v)) \in E'$

Isomorfismo

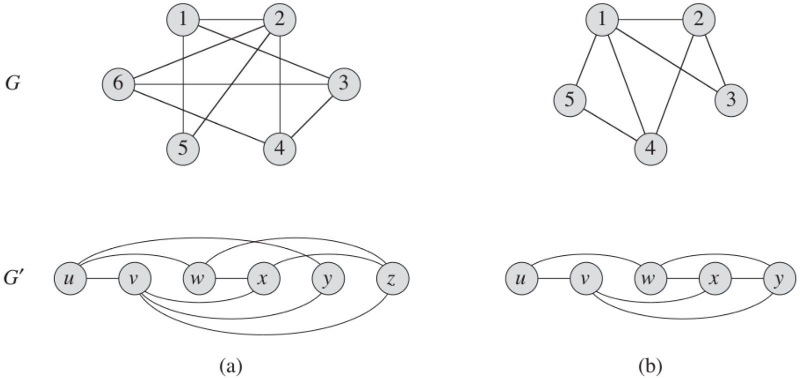
- Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são **isomorfos** se existe uma bijeção $f : V \to V'$ tal que $(u, v) \in E$ se e somente se $(f(u), f(v)) \in E'$
  - Podemos identificar os vértices de G como vértices de G', mantendo as arestas correspondentes em G e G'

Isomorfismo



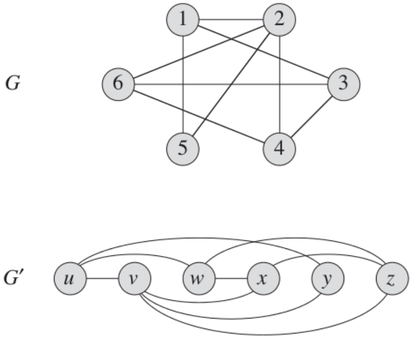
(a) (b)

Isomorfismo



- Os grafos da figura c são isomorfos entre si?
  - $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y, z\}$

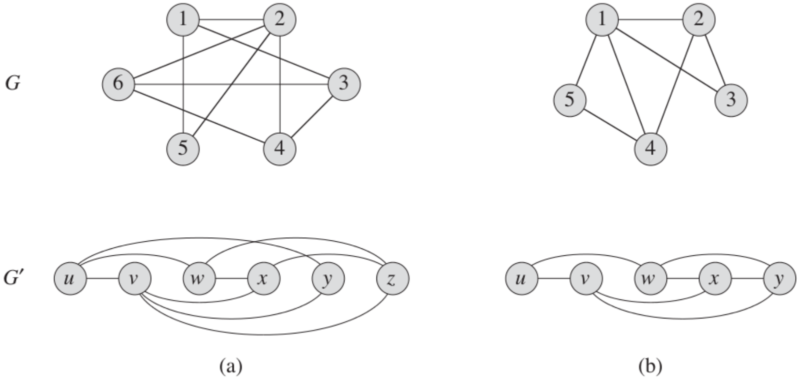
Isomorfismo



(a) (b)

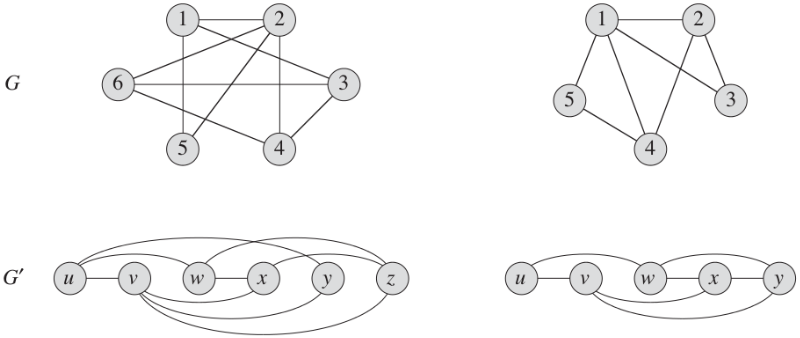
- Os grafos da figura c são isomorfos entre si?
  - $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y, z\}$
  - $|V| = 6$ e $|V'| = 6$

Isomorfismo



- Os grafos da figura c são isomorfos entre si?
  - $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y, z\}$
  - $|V| = 6$ e $|V'| = 6$; $|E| = 9$ e $|E'| = 9$

Isomorfismo

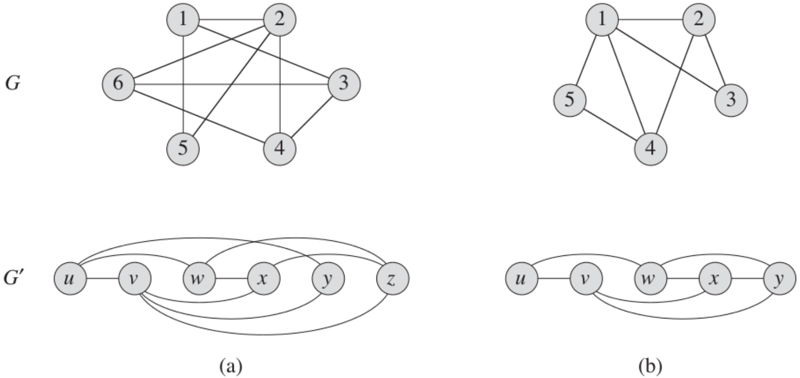


(a)

(b)

- Os grafos da figura c são isomorfos entre si?
  - $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y, z\}$
  - $|V| = 6$ e $|V'| = 6$; $|E| = 9$ e $|E'| = 9$
  - Mapeamento de V para V' dado pela função bijetora $f(1) = u,\ f(2) = v,\ f(3) = w,\ f(4) = x,\ f(5) = y,\ f(6) = z$

Isomorfismo



- Os grafos da figura c são isomorfos entre si?
  - $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y, z\}$
  - $|V| = 6$ e $|V'| = 6$; $|E| = 9$ e $|E'| = 9$
  - Mapeamento de V para V' dado pela função bijetora $f(1) = u,\ f(2) = v,\ f(3) = w,\ f(4) = x,\ f(5) = y,\ f(6) = z$
  - Sim, são isomorfos

Isomorfismo

- Os grafos da figura d, são isomorfos?
  - $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y\}$

Isomorfismo

- Os grafos da figura d, são isomorfos?
  - $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y\}$
  - $|V| = 5$ e $|V'| = 5$; $|E| = 7$ e $|E'| = 7$

Isomorfismo

- Os grafos da figura d, são isomorfos?
  - $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y\}$
  - $|V| = 5$ e $|V'| = 5$; $|E| = 7$ e $|E'| = 7$
  - G tem um vértice de grau 4, mas G' não tem

Isomorfismo

- Os grafos da figura d, são isomorfos?
  - $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y\}$
  - $|V| = 5$ e $|V'| = 5$; $|E| = 7$ e $|E'| = 7$
  - G tem um vértice de grau 4, mas G' não tem
  - Não são isomorfos

Subgrafos

- $G' = (V', E')$ é um **subgrafo** de $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$

Subgrafos

- $G' = (V', E')$ é um **subgrafo** de $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$
- Dado um conjunto V' de modo que $V' \subseteq V$, o subgrafo de G **induzido** por V' é o grafo $G' = (V', E')$, onde $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$
- Qual é o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 6\}$ na figura a?

Subgrafos

- $G' = (V', E')$ é um **subgrafo** de $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$
- Dado um conjunto V' de modo que $V' \subseteq V$, o subgrafo de G **induzido** por V' é o grafo $G' = (V', E')$, onde $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$
- Qual é o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 6\}$ na figura a?
  $G = (\{1, 2, 3, 6\}, \{(1, 2), (2, 2), (6, 3)\})$

Versões orientada e não orientada

- Dado um grafo não orientado $G = (V, E)$, a **versão orientada** de G é o grafo orientado $G' = (V, E')$, onde $(u, v) \in E'$ se e somente se $(u, v) \in E$

Versões orientada e não orientada

- Dado um grafo não orientado $G = (V, E)$, a **versão orientada** de G é o grafo orientado $G' = (V, E')$, onde $(u, v) \in E'$ se e somente se $(u, v) \in E$
  - Cada aresta não orientada (u, v) em G é substituída na versão orientada pelas duas arestas orientadas (u, v) e (v, u)

Versões orientada e não orientada

- Dado um grafo não orientado $G = (V, E)$, a **versão orientada** de G é o grafo orientado $G' = (V, E')$, onde $(u, v) \in E'$ se e somente se $(u, v) \in E$
  - Cada aresta não orientada (u, v) em G é substituída na versão orientada pelas duas arestas orientadas (u, v) e (v, u)
- Dado um grafo orientado $G = (V, E)$, a **versão não orientada** de G é o grafo não orientado $G' = (V, E')$, onde $(u, v) \in E'$ se e somente se $u \neq v$ e $(u, v) \in E$

Versões orientada e não orientada

- Dado um grafo não orientado $G = (V, E)$, a **versão orientada** de G é o grafo orientado $G' = (V, E')$, onde $(u, v) \in E'$ se e somente se $(u, v) \in E$
  - Cada aresta não orientada (u, v) em G é substituída na versão orientada pelas duas arestas orientadas (u, v) e (v, u)
- Dado um grafo orientado $G = (V, E)$, a **versão não orientada** de G é o grafo não orientado $G' = (V, E')$, onde $(u, v) \in E'$ se e somente se $u \neq v$ e $(u, v) \in E$
  - A versão não orientada contém as arestas de G "com suas orientações removidas" e autoloops eliminados

Versões orientada e não orientada

- Dado um grafo não orientado $G = (V, E)$, a **versão orientada** de G é o grafo orientado $G' = (V, E')$, onde $(u, v) \in E'$ se e somente se $(u, v) \in E$
  - Cada aresta não orientada (u, v) em G é substituída na versão orientada pelas duas arestas orientadas (u, v) e (v, u)
- Dado um grafo orientado $G = (V, E)$, a **versão não orientada** de G é o grafo não orientado $G' = (V, E')$, onde $(u, v) \in E'$ se e somente se $u \neq v$ e $(u, v) \in E$
  - A versão não orientada contém as arestas de G "com suas orientações removidas" e autoloops eliminados
  - Mesmo que o grafo orientado contenha as arestas (u, v) e (v, u), o grafo não orientado conterá (u, v) somente uma vez

Vizinho

- Em um grafo orientado, um vizinho de um vértice u é qualquer vértice que seja adjacente a u na versão não orientada
  - v é **vizinho** de u se $(u, v) \in E$ ou $(v, u) \in E$

Vizinho

- Em um grafo orientado, um vizinho de um vértice u é qualquer vértice que seja adjacente a u na versão não orientada
  - v é **vizinho** de u se $(u, v) \in E$ ou $(v, u) \in E$
- Em um grafo não orientado, u e v são vizinhos se são adjacentes

Grafos com nomes especiais

- **Grafo completo** é um grafo não orientado no qual todo par de vértices é adjacente
- Um grafo completo com n vértices é chamado de K_n

Grafos com nomes especiais

- **Grafo completo** é um grafo não orientado no qual todo par de vértices é adjacente
- Um grafo completo com n vértices é chamado de K_n
- **Grafo bipartido** é um grafo não orientado $G = (V, E)$ em que V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tais que $(u, v) \in E$ implica que
  $u \in V_1$ e $v \in V_2$ ou
  $u \in V_2$ e $v \in V_1$

Grafos com nomes especiais

- **Grafo completo** é um grafo não orientado no qual todo par de vértices é adjacente
- Um grafo completo com n vértices é chamado de K_n
- **Grafo bipartido** é um grafo não orientado $G = (V, E)$ em que V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tais que $(u, v) \in E$ implica que
  $u \in V_1$ e $v \in V_2$ ou
  $u \in V_2$ e $v \in V_1$
  - Todas as arestas ficam entre os dois conjuntos V_1 e V_2

Grafos com nomes especiais

- **Grafo completo** é um grafo não orientado no qual todo par de vértices é adjacente
- Um grafo completo com n vértices é chamado de K_n
- **Grafo bipartido** é um grafo não orientado $G = (V, E)$ em que V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tais que $(u, v) \in E$ implica que
  $u \in V_1$ e $v \in V_2$ ou
  $u \in V_2$ e $v \in V_1$
  - Todas as arestas ficam entre os dois conjuntos V_1 e V_2
- Um grafo acíclico não orientado é uma **floresta**
- Um grafo conexo acíclico não orientado é uma **árvore (livre)**

Grafos com nomes especiais

- **Grafo completo** é um grafo não orientado no qual todo par de vértices é adjacente
- Um grafo completo com n vértices é chamado de K_n
- **Grafo bipartido** é um grafo não orientado $G = (V, E)$ em que V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tais que $(u, v) \in E$ implica que
  $u \in V_1$ e $v \in V_2$ ou
  $u \in V_2$ e $v \in V_1$
  - Todas as arestas ficam entre os dois conjuntos V_1 e V_2
- Um grafo acíclico não orientado é uma **floresta**
- Um grafo conexo acíclico não orientado é uma **árvore (livre)**
- **gao**: grafo acíclico orientado

Variantes de grafos

- Semelhantes a grafos não orientados
  - **Multigrafo**: pode ter várias arestas entre vértices e também autoloops

Variantes de grafos

- Semelhantes a grafos não orientados
  - **Multigrafo**: pode ter várias arestas entre vértices e também autoloops
  - **Hipergrafo**: cada **hiperarestas**, em lugar de conectar dois vértices, conecta um subconjunto arbitrário de vértices

Referências

- Wikipedia - Seven Bridges of Königsberg
- Thomas H. Cormen et al. Introduction to Algorithms. 3^{rd} edition. Capítulo B.4.