O estudo utilizando apenas este material **não é suficiente** para o entendimento do conteúdo. Recomendamos a leitura das referências no final deste material e a resolução (por parte do aluno) de todos os exercícios indicados.

Grafos

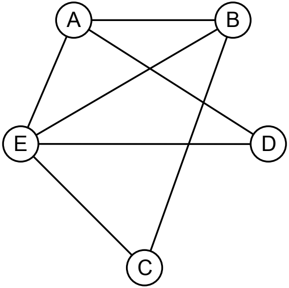
Grafos planares

Conteúdo

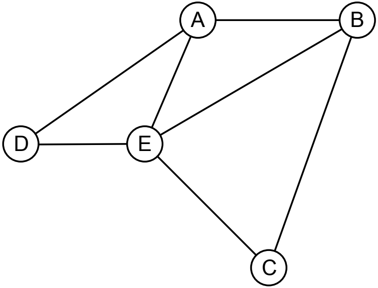
Introdução

- Uma **imersão** de um grafo G em uma superfície S é uma representação geométrica (desenho) de G em S tal que dois vértices distintos não ocupam o mesmo lugar em S e não existe cruzamento de arestas, a não ser nos extremos quando duas arestas são adjacentes
- Um grafo G é **planar** se ele tem imersão no plano ($\mathbb{R}^2$)
- As regiões limitadas por uma imersão planar são chamadas de **faces**
- Todo imersão planar têm uma face ilimitada denominada de **face externa**

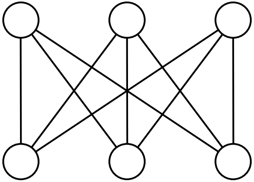
Exemplos



Desenho não planar



Desenho planar



Grafo não planar. Não é possível desenhas este grafo sem cruzamento de arestas

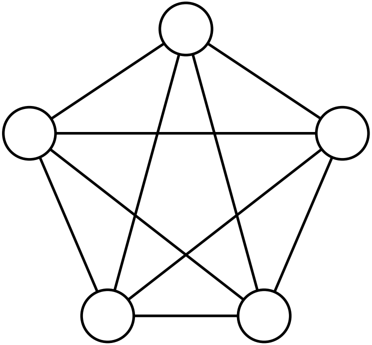
Propriedades

Teorema 1 - Fórmula de Euler
Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com f faces, então $|V| + f = |E| + 2$. (A discussão da prova foi feita em sala)

Corolário 1
Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com $|E| > 1$ arestas, então $|E| \leq 3|V| - 6$.

Propriedades

Podemos usar o Corolário 1 para mostrar que o K_5 é não planar. O K_5 tem 5 vértices e 10 arestas, desta foma $3|V| - 6 = 9$, o que implica que $|E| \leq 3|V| - 6$ é falso. Portanto, o K_5 é não planar.



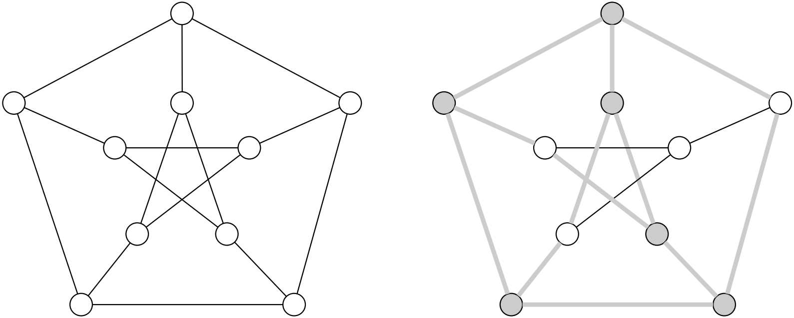
Propriedades

- Uma **operação de subdivisão** de uma aresta $e = (u, v)$ é uma substituição de e por um novo vértice w e duas novas arestas (u, w) e (w, v)
- Uma **subdivisão** de um grafo G é um grafo H que pode ser obtido a partir de G por uma sequência finita de operações de subdivisão de arestas

Teorema 1 - Kuratowski

Um grafo G é planar se, e somente se, ele não contém uma subdivisão do $K_{3,3}$ e do K_5.

Exemplo



Grafo de Pertersen não é planar porque
contém uma subdivisão do K3,3

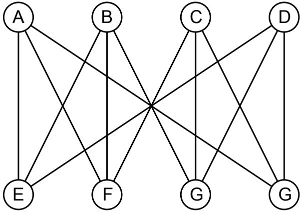
Métodos de teste de planaridade

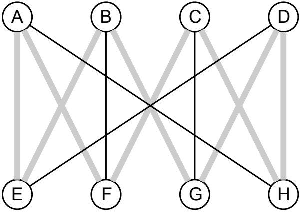
- Dado um grafo $G = (V, E)$, o **problema do teste de planaridade** consiste em determinar se G é planar
- Existem diversos algoritmos com tempo de execução $O(V + E)$
  - Algoritmo clássico baseado em adição de caminhos (Hopcroft e Tarjan, 1974)
  - Baseado em adição de vértices (Lempel, Even e Cederbaum, 1967, melhorado por Eve e Tarjan, 1976, e Booth e Lueker)
  - Baseado em adição de arestas (Boyer e Myrvold, 2004), considerado como estado da arte
- Estes algoritmos são bastante elaborados, difíceis de entender e implementar
- Para grafos pequenos, podemos manualmente se um grafo é planar usando o método heurístico círculo-corda

Método círculo-corda para teste de planaridade

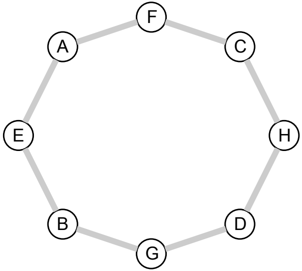
- O método círculo-corda consiste em
  - Passo 1: Encontrar um ciclo que contém todos os vértices do grafo e desenhá-lo como um círculo
  - Passo 2: O restante das arestas que não estão círculo, chamadas de cordas, deve ser desenhas ou do lado de dentro ou do lado de fora do círculo, de maneira que o desenho seja planar
- Observe-se que este é um método heurístico, nem todos os grafos planares podem ser desenhados com este método

Exemplo

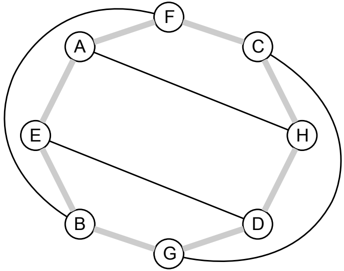




Identificação de um ciclo com todos os vértices



Desenho do ciclo em forma de círculo



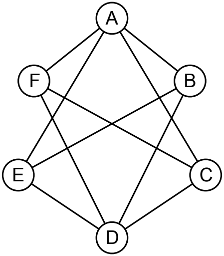
Desenho das arestas restantes

Medidas de não planaridade

- Quando um grafo não é planar, uma questão interessante é: o quão longe de ser planar o grafo está?
- Algumas medidas de não planaridade
  - Número mínimo de cruzamento de arestas para um desenho no plano ($\nu(G)$ - o *crossing number* de G)
  - Número mínimo de arestas cuja remoção do grafo resulta em um grafo planar ($\kappa(G)$ - a *skewness* de G)
  - Número mínimo de operações de divisões de vértices que obtêm um grafo planar ($\sigma(G)$ - o *splitting number* de G)
- Pela definição destas medidas, podemos observar que $\sigma(G) \leq \kappa(G) \leq \nu(G)$

Exercícios

1. Quantas faces existem em um grafo planar com 10 vértices e cada vértice com grau 3?
2. O grafo da figura abaixo é planar?



3. Qual é o número de cruzamentos do grafo de Petersen?

Referências

- Grafos planares. Wikipédia.
  https://en.wikipedia.org/wiki/Planar_graph
- Teste de planaridade. Wikipédia.
  https://en.wikipedia.org/wiki/Planarity_testing