O estudo utilizando apenas este material **não é suficiente** para o entendimento do conteúdo. Recomendamos a leitura das referências no final deste material e a resolução (por parte do aluno) de todos os exercícios indicados.

# Grafos

## Caminhos mínimos de todos os pares

# Conteúdo

# Introdução

- Dado um grafo orientado $G = (V, E)$ e uma função peso $w : E \rightarrow R$, queremos encontrar, para todo par de vértices $u, v \in V$, o caminho de peso mínimo de $u$ até $v$

# Introdução

- Podemos resolver este problema aplicando um algoritmo de caminho mínimo de única origem $|V|$ vezes, uma vez para cada vértice
  - Dijkstra (sem arestas com pesos negativos)
    - Arranjo linear: $O(V^3 + VE) = O(V^3)$
    - Heap binário: $O(VE \lg V)$, se o grafo é denso $O(V^3 \lg V)$
    - Heap de fibonacci: $O(V^2 \lg V + VE)$, se o grafo é denso $O(V^3)$
  - Bellman-Ford (grafos gerais)
    - $O(V^2 E)$, se o grafo é denso $O(V^4)$
- Veremos um algoritmo $O(V^3)$ que não usa nenhuma estrutura de dados especial

# Introdução

- Considerações
  - Supomos que não existem ciclos de pesos negativos
  - Os vértices estão numerados como $1, 2, 3, \ldots, n$, onde $n = |V|$
- Entrada
  - Uma matriz $Wn \times n$ que representa os pesos das arestas. Isto é, $W = w_{ij}$, onde

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \text{o peso da aresta } (i,j) & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \in E \\ \infty & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \notin E \end{cases}$$

- Saída
  - Matriz $Dn \times n = d_{ij}$, onde a entrada $d_{ij}$ contém o peso do caminho mínimo do vértice $i$ até o vértice $j$, ou seja, $d_{ij} = \delta(i,j)$
  - Matriz predecessora $\Pi n \times n = \pi_{ij}$, onde $\pi_{ij}$ é o vértice predecessor de $j$ em um caminho mínimo a partir de $i$

# Baseado em multiplicação de matrizes

- Não estudaremos este algoritmo

# O algoritmo de Floyd-Warshall

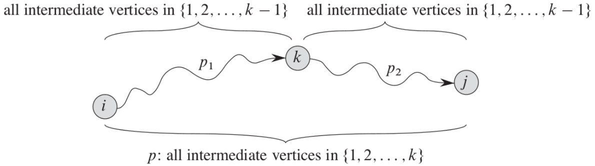
- Algoritmo de programação dinâmica com tempo $\Theta(V^3)$
- Ideia
  - O caminho mínimo pode ser calculado baseado nos caminhos mínimos para subproblemas já calculados e memorizados
  - Subproblemas ótimos
  - Superposição de subproblemas

# O algoritmo de Floyd-Warshall

- Para um caminho $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_l \rangle$, um **vértice intermediário** é qualquer vértice de $p$ que não seja $v_1$ ou $v_l$

# O algoritmo de Floyd-Warshall

- Considere um caminho mínimo $i \overset{p}{\rightsquigarrow} j$ com todo os vértices intermediários em $\{1, 2, \dots, k\}$
  - Se $k$ não é um vértice intermediário de $p$, então, todos os vértices intermediários de $p$ estão em $\{1, 2, \dots, k-1\}$. Deste modo, um caminho mínimo $i \rightsquigarrow j$ com todo os vértices intermediários no conjunto $\{1, 2, \dots, k-1\}$, também é um caminho mínimo $i \rightsquigarrow j$ com todos os vértices intermediários no conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$
  - Se $k$ é um vértice intermediário do caminho $p$, então desmembramos o caminho $p$ em $i \overset{p_1}{\rightsquigarrow} k \overset{p_2}{\rightsquigarrow} j$. $p_1$ é um caminho mínimo de $i$ até $k$, com todos os vértices intermediários no conjunto $\{1, 2, \dots, k-1\}$. A mesma ideia se aplica a $p_2$



# O algoritmo de Floyd-Warshall

- Formulação
  - Seja $d_{ij}^{(k)}$ o peso de um caminho mínimo $i \rightsquigarrow j$ com todos os vértices intermediários em $\{1, 2, \ldots, k\}$

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{se } k = 0 \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

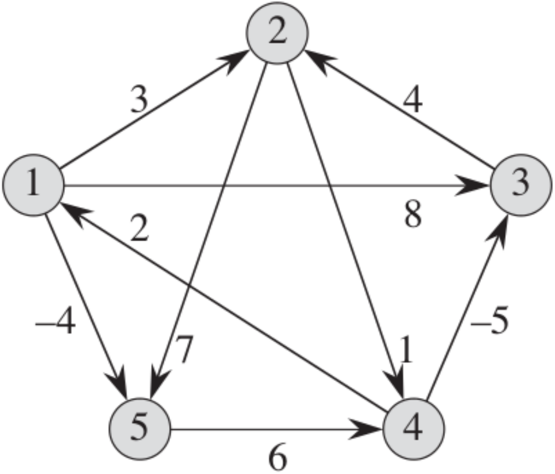
- Considerando-se que, para qualquer caminho, todos os vértices intermediários estão no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, a matriz $D^{(n)} = (d_{ij}^{(n)})$ fornece a reposta desejada: $d_{ij}^{(n)} = \delta(i, j)$ para todo $i, j \in V$

# O algoritmo de Floyd-Warshall

floyd-warshall(W)
1 $n$ = $W$.linhas
2 $D^{(0)}$ = $W$
3 for $k = 1$ to $n$
4    for $i = 1$ to $n$
5       for $j = 1$ to $n$
6          $d_{ij}^{(k)}$ = min($d_{ij}^{(k-1)}$, $d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$)
7 return $D^{(n)}$

- Análise do tempo de execução
  - Cada execução da linha 6 demora $O(1)$
  - A linha 6 é executada $n^3$ vezes
  - Portanto, o tempo de execução do algoritmo é $\Theta(n^3) = \Theta(V^3)$

# O algoritmo de Floyd-Warshall



# O algoritmo de Floyd-Warshall

$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(0)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} \\ 4 & \text{NIL} & 4 & \text{NIL} & \text{NIL} \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(1)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} \\ 4 & 1 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

# O algoritmo de Floyd-Warshall

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(1)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} \\ 4 & 1 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(2)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

# O algoritmo de Floyd-Warshall

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(2)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(3)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

# O algoritmo de Floyd-Warshall

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(3)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(4)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & \text{NIL} & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & \text{NIL} & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

# O algoritmo de Floyd-Warshall

$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(4)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & \text{NIL} & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & \text{NIL} & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(5)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & \text{NIL} & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & \text{NIL} & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

# O algoritmo de Floyd-Warshall

- Como construir um caminho mínimo
  - Calcular a matriz predecessora $\Pi$, durante o calculo da matriz de distância de caminhos mínimos $D$
  - Quando $k = 0$, um caminho mínimo de $i$ até $j$ não tem nenhum vértice intermediário, então

$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \text{nil} & \text{se } i = j \text{ ou } w_{ij} = \infty \\ i & \text{se } i \neq j \text{ e } w_{ij} < \infty \end{cases}$$

  - Quando $k \geq 1$

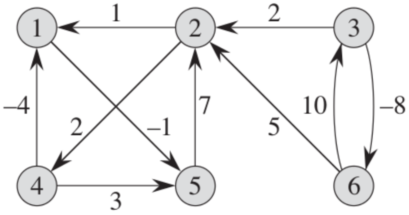
$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \pi_{ij}^{(k-1)} & \text{se } d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \\ \pi_{kj}^{(k-1)} & \text{se } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \end{cases}$$

# Exercícios

- 25.2-1, 25.2-3, 25.2-4, 25.2-5 e 25.2-6

# Exercícios

25.2-1 Execute o algoritmo de Floyd-Warshall sobre o grafo orientado ponderado da figura 25.2. Mostre a matriz $D^{(k)}$ que resulta de cada iteração do laço externo.




25.2-3 Modifique o procedimento `floyd-warshall` para incluir o cálculo das matrizes $\Pi^{(k)}$ de acordo com as equações 25.6 e 25.7.

25.2-6 De que modo a saída do algoritmo de Floyd-Warshall pode ser usada para detectar a presença de um ciclo de peso negativo?

# Algoritmo de Johnson para grafos esparsos

- Não estudaremos este algoritmo

# Referências


- Thomas H. Cormen et al. Introduction to Algorithms. $3^{rd}$ edition. Capítulo 25.