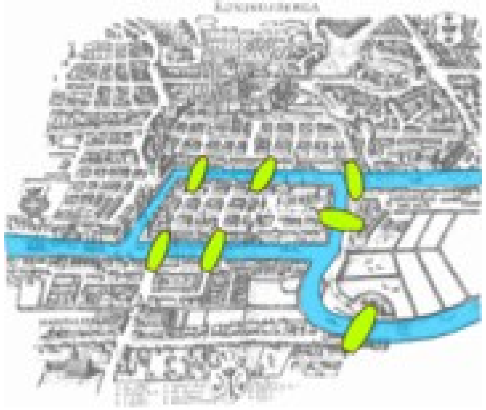
Grafos Eulerianos e o Problema do Carteiro Chinês

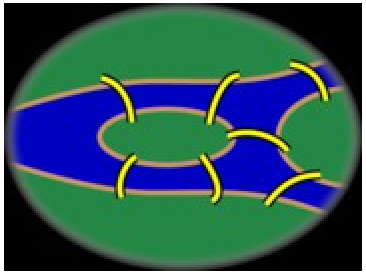
Prof. Ademir Constantino
Departamento de Informática
Universidade Estadual de Maringá

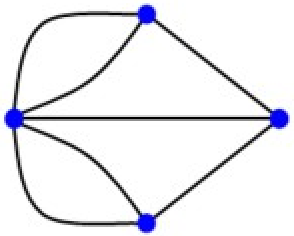
História

Leonhard Euler

“O problema das Sete Pontes de *Königsberg*”, 1736.



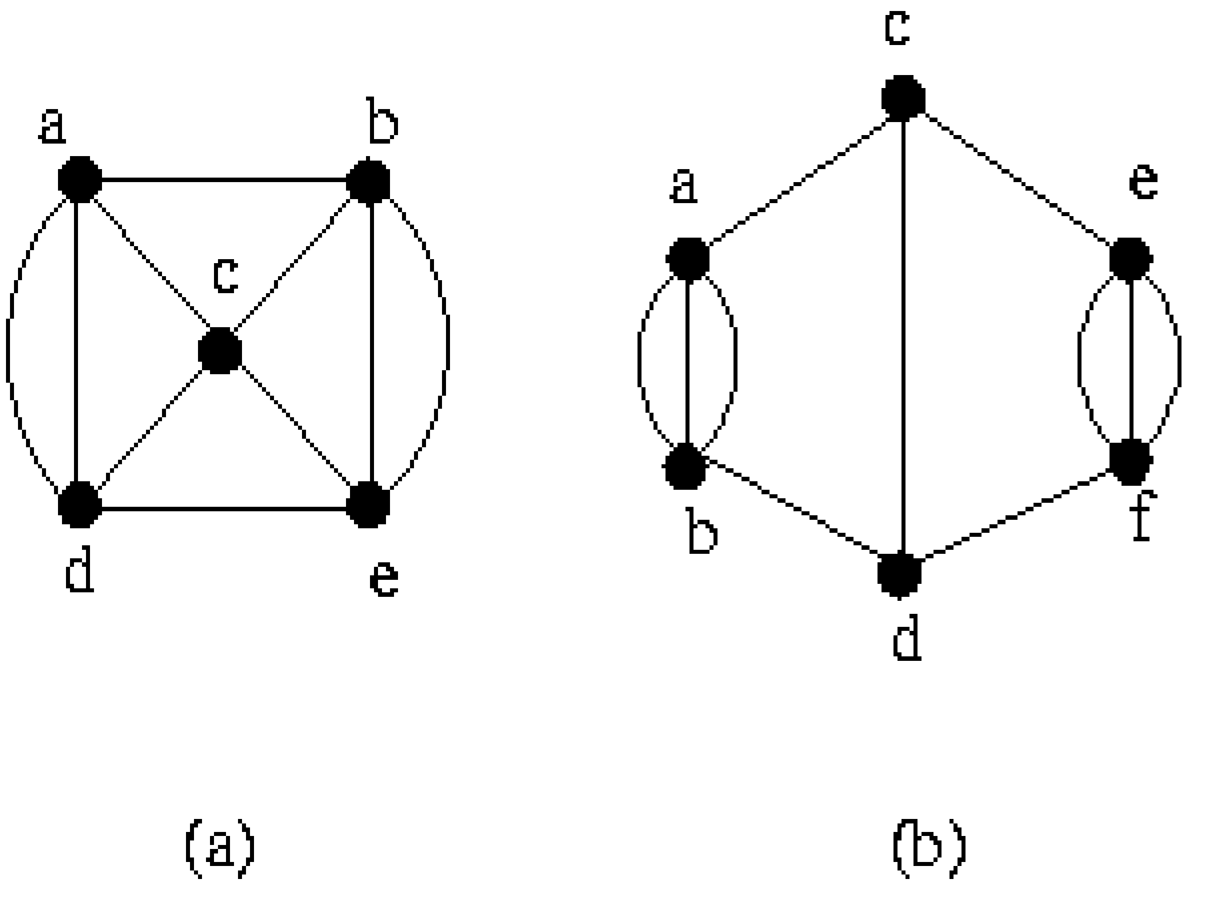




Definições

- Um caminho simples ou um circuito simples é dito ***euleriano*** se ele contém todas as arestas de um grafo.
- Um grafo que contém um circuito euleriano é um ***grafo euleriano***.
- Um grafo que não contém um circuito euleriano, mas contém um caminho euleriano será chamado ***grafo semi-euleriano***

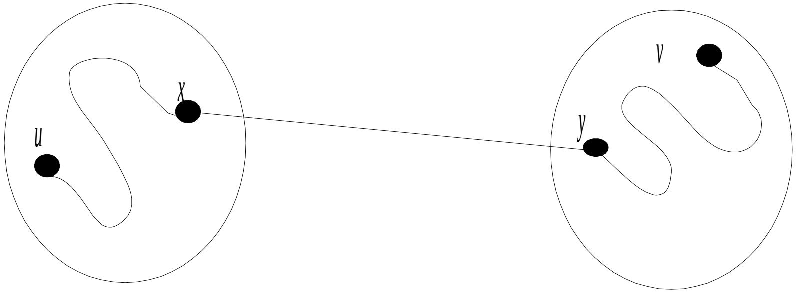
Definições



Propriedades

***Lema** 1: Dado um grafo conexo com todos os vértices de grau par, então qualquer par de vértice faz parte de um caminho simples e fechado.*

Prova: (*Por contradição*). Suponha que exista um par de vértices u e v que não admitem um circuito simples em comum. Como o grafo é conexo, então existe um caminho que liga u e v. Portanto, existe uma aresta (x, y) cuja a remoção desconexa o grafo, caso contrário haveria um outro caminho disjunto alternativo ligando u e v.



Portanto, a remoção da aresta (x, y) desconeta grafo gerando duas componentes conexas, sendo o vértice x e y pertencentes a componentes diferentes. Com isso, ambos os vértices passarão a ser os únicos vértices de grau ímpar. Isso contradiz o fato que o número de vértices de grau ímpar de um subgrafo deva ser par. C.Q.D.

Propriedades

Teorema 1: ***Um grafo conexo G é um grafo euleriano se e somente se todo vértice de G possui grau par.***

Prova:

Ida: Seja G um grafo euleriano. Logo ele contém um circuito euleriano. Por cada ocorrência de vértice desse caminho, existe uma aresta que chega nesse vértice e outra que sai desse vértice. Como toda aresta faz parte do caminho, isto é, nenhuma aresta fica fora do caminho, necessariamente o número de arestas incidentes em cada vértice é par.

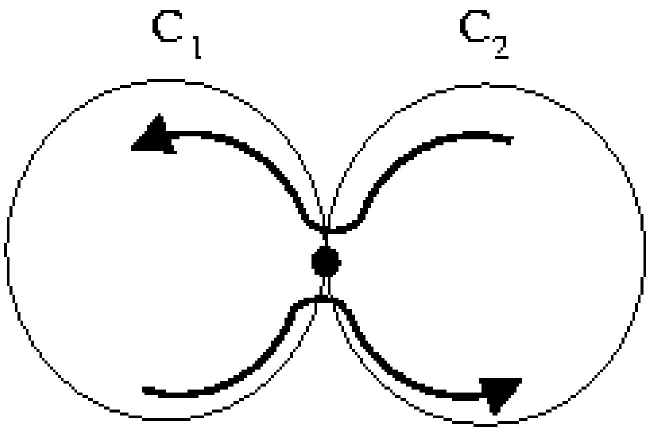
Propriedades

Teorema 1: ***Um grafo conexo G é um grafo euleriano se e somente se todo vértice de G possui grau par.***

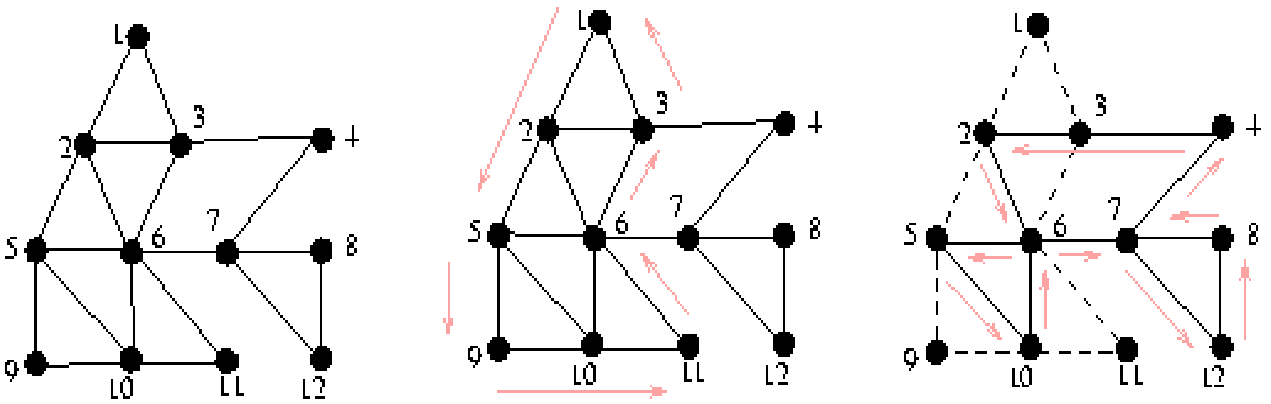
Prova:

Volta: Como todo vértice possui grau par, então na construção de um caminho sempre é possível chegar e sair de um vértice por arestas diferentes ainda não utilizada. Assim, é possível sair de vértice *v* e retornar a ele sem repetição de arestas (Lema 1). Seja C_1 um circuito contendo *v* construído de maneira arbitrária. Logo, se C_1 contém todas as arestas de G, temos um circuito euleriano (Por quê?). Senão, retiramos de G todas as arestas que fazem parte de C_1. No grafo resultante G', todos os vértices também possuem grau par e necessariamente um deles faz parte de C_1, senão o grafo não seria conexo. Recomecemos o mesmo processo com o grafo G', partindo de um vértice comum com C_1, obtendo assim um novo circuito C_2. A figura 2 mostra que dois circuitos que têm um vértice em comum podem formar um circuito único: chegando no vértice comum em um dos dois circuitos, continuamos o percurso no outro circuito. Continuando esse processo, necessariamente obteremos um circuito único que contém todas as arestas de *G*. Logo o grafo é euleriano. C.Q.D

Ilustração do Teorema 1



- Aplicação:



(a) (b) (c)

Algoritmo Hierholzer

Função *Hierholzer*(G = (V,E): *grafo*) : *caminho*

G' := G { G' = (V', E')}
v_0 := um vértice de G'
C := [v_0] {Inicialmente, o circuito contém só v_0}

Enquanto E' não vazio

v_i := um vértice de C tal que d(v_i) > 0 em G'
C' := Circuito em G' que contém v_i

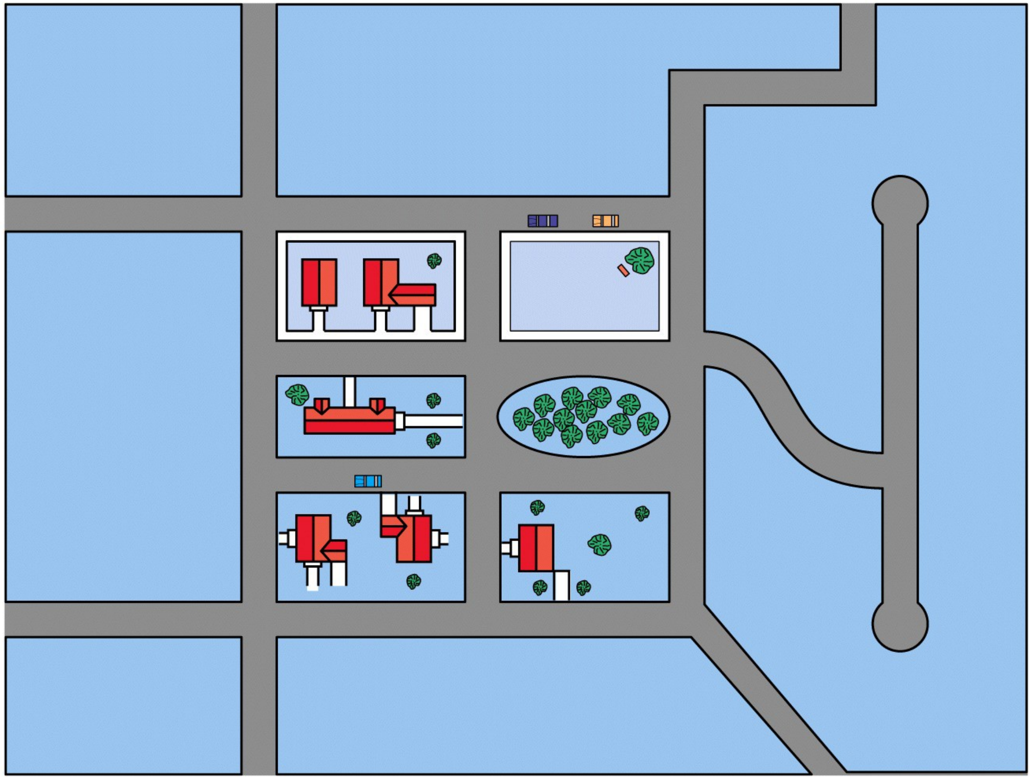
G' := G' - {a | a é aresta contida em C'}
Em C, substituir o vértice v_i pelo circuito C'

Retornar C

Complexidade do Algoritmo Hierholzer

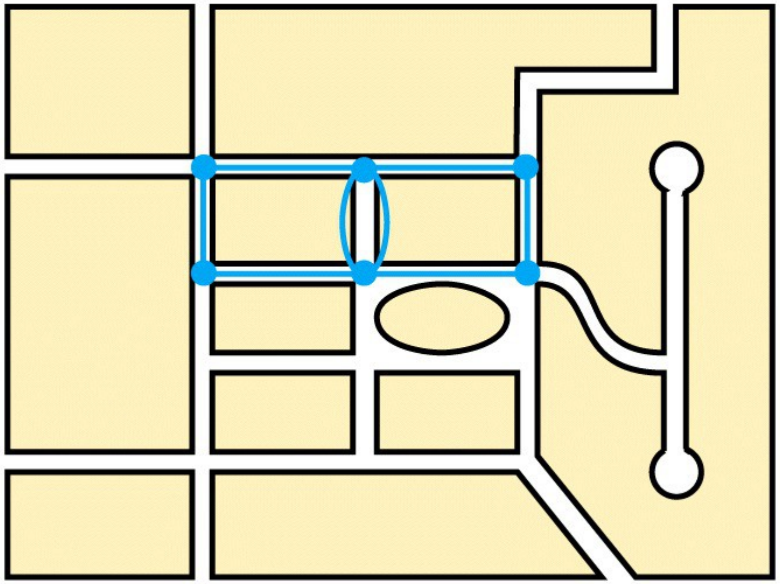
Problema do Carteiro Chines

- Aplicações:
  - Entrega de Correspondência
  - Coleta de lixo domético
  - Nebulização (fumacê) no combate à dengue

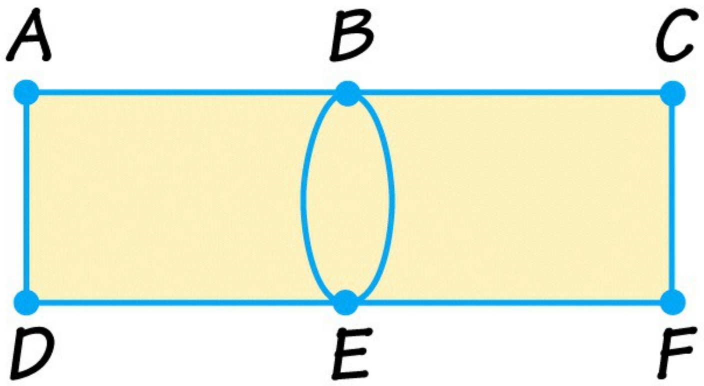


Convertendo a Rede Viária em Grafo

- Repetição de arestas.



(a)

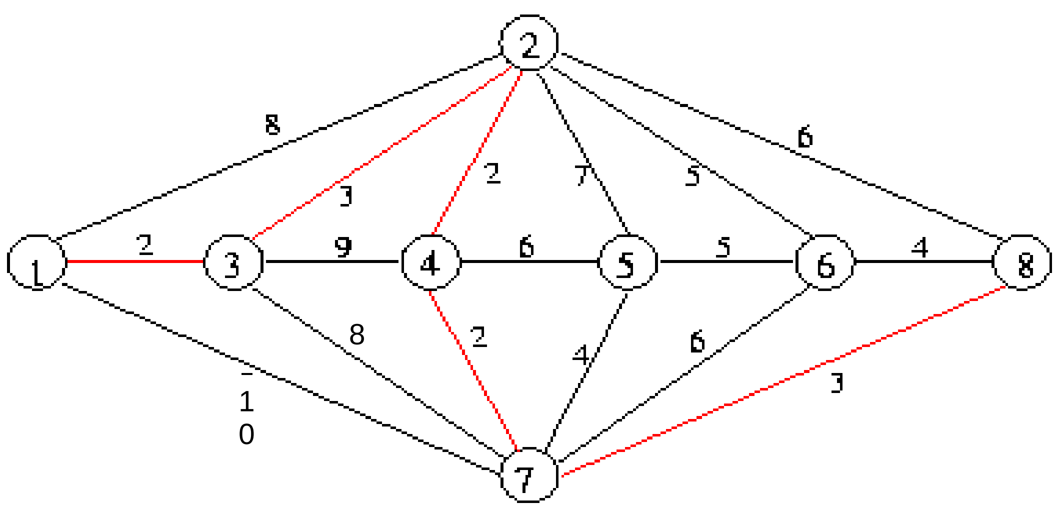


(b)

Problema do Carteiro Chinês - PCC

Dado um grafo *G*=(*V*,*E*) conexo com pesos nas arestas, o objetivo do ***Problema do Carteiro Chinês*** é encontrar um caminho fechado de peso mínimo passando por cada aresta pelo menos uma vez.

Como é possível esta solução para o grafo a seguir?



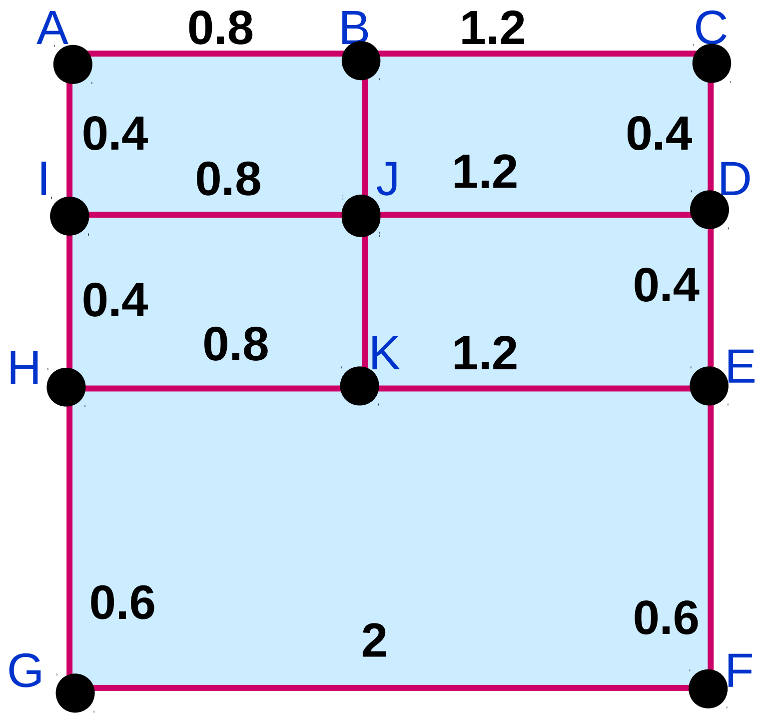
Solução para o PCC

- **Solução 1**: Se o grafo for de Euler, então o caminho pode ser encontrado usando, por exemplo, o algoritmo de Hierholzer.

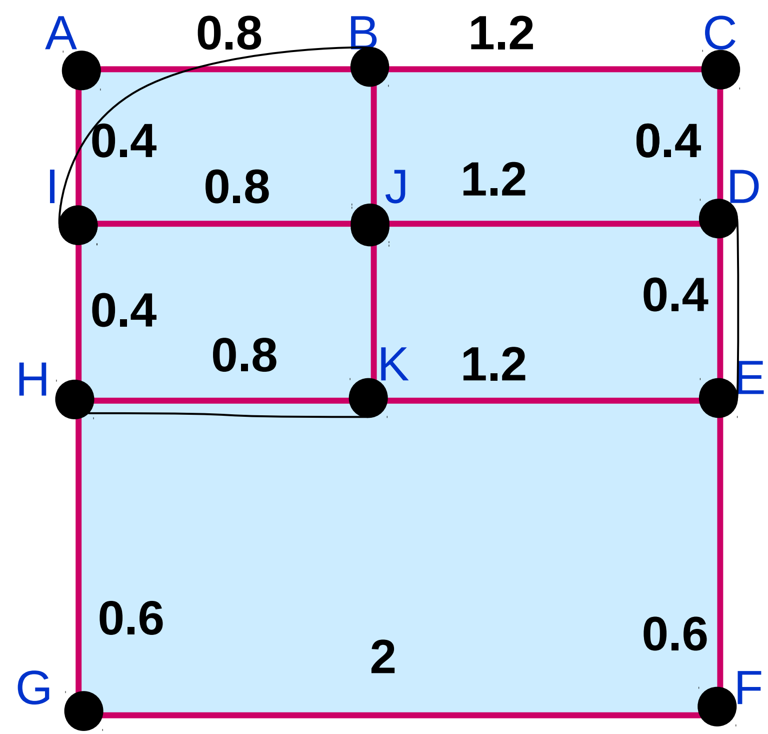
- **Solução 2**: Se o grafo não for de Euler, então algumas arestas terão que ser repetidas. A maneira clássica de resolver este problema é acrescentando arestas artificiais ao grafo original de forma a obter um novo grafo $G'=(V,E')$. Isto deve ser feito de maneira que as arestas artificiais acrescentadas transformem todos os vértices de grau ímpar de G, em vértices de grau par. As arestas artificiais correspondem aos eventuais percursos repetidos de custo mínimo entre pares de vértices de grau impar.

Problema

- Encontre a solução para este exemplo:



Solução



KHGFEDCBAIABJDEKJIHK

Como gerar as combinações de pares?

Supondo que o grafo tenha 2*k* vértices de grau ímpar, em geral, o número *r* de percursos é dado por:

Para ter uma idéia, observe estes exemplos:

# de vértices = 2k	4	6	8	10	20
# de combinações	3	15	105	945	$655x10^6$

- É possível resolver manualmente?

Técnicas de Resolução

- Se o grafo tiver apenas dois vértices de grau ímpar:
  - Apenas encontre o menor caminho entre os dois vértices pelo algoritmo de Dijkstra (por exemplo).
- Se o grafo tiver 4 ou mais vértices de grau ímpar:
  - Montar um grafo completo com estes vértices, sendo que cada aresta representando o menor caminho entre os pares de vértices (algoritmo de Floyd).
  - Encontrar a melhor combinação de pares de vértices usando o algoritmo Edmond (1973) de complexidade polinomial.

J. Edmonds and E. Johnson. Matching, Euler tours, and the Chinese postman. Math. Programming, 5:88-124, 1973.

Considerações Finais

- Problema do Carteiro Chinês
  - Grafo não orientado:
    - Tem solução em tempo polinomial
  - Grafo orientado:
    - Tem solução em tempo polinomial
  - Grafo misto (aresta com orientação e arestas sem orientação):
    - Não se conhece algoritmo de complexidade polinomial.

PCC em Grafo Mistro

- Uma possível modelagem para o problema:

Min

$$\sum_{s \in A \cup \hat{E} \cup \check{E}} c_s x_s \tag{1}$$

Subject to

$$
\begin{aligned}
y'_e + y'_{\tilde{e}} &\geq 1 && \forall e \in E && (2)\\
x_s &= y'_s + y_s && \forall s \in A \cup \hat{E} \cup \check{E} && (3)\\
\sum_{s \in \delta^+(v)} x_s - \sum_{s \in \delta^-(v)} x_s &= 0 && \forall v \in V && (4)\\
y'_a &= 1 && \forall a \in A && (5)\\
y'_e &\in \{0,1\} && \forall e \in \hat{E} \cup \check{E} && (6)\\
y_s &\geq 0,\ integer && \forall s \in A \cup \hat{E} \cup \check{E} && (7)
\end{aligned}
$$

T. K. Ralphs. On the mixed chinese postman problem. Oper. Res. Lett., 14:123--127, 1993.
http://citeseer.ist.psu.edu/ralphs93mixed.html

Bom estudo!