

Grafos

Introdução

Notas

Conteúdo

Histórico

Definições e propriedades

Caminhos e ciclos

Conexidade

Isomorfismo

Subgrafos

Versões orientada e não orientada

Vizinho

Contração de aresta

Grafo com nomes especiais

Variantes de grafo

Referências

Notas

Histórico

- ▶ Em 1736 Leonhard Euler propôs e resolveu o problema das sete pontes de Königsberg
- ▶ A cidade de Königsberg era cortada por um rio que continha duas ilhas
- ▶ Existiam 7 pontes que ligavam as ilhas e as margens do rio
- ▶ O problema consistia em encontrar um caminho que cruzasse cada uma das 7 pontes uma única vez
- ▶ Existe tal caminho?

3 / 26

Notas

Histórico

- ▶ Euler formulou o problema em termos abstratos



4 / 26

Notas

Histórico

- ▶ Euler observou que toda vez que alguém atinge uma porção de terra por uma ponte, deve deixar a porção de terra também por uma ponte
- ▶ Para que cada ponte seja cruzada apenas uma vez, todas as porções de terra, exceto talvez a inicial e a final, devem ter um número par de pontes que ligadas a ela
- ▶ Mas todas as porções de terra do problema tem um número ímpar de pontes
- ▶ Com esta observação, Euler mostrou que o problema não tem solução
- ▶ Surgiu a área da matemática que é conhecida como Teoria dos Grafos

5 / 26

Notas

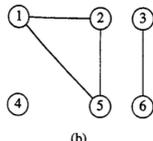
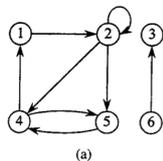
Definições e propriedades

- ▶ Um **grafo orientado** G é um par (V, E) , onde
 - ▶ V é um conjunto finito, chamado de **conjunto de vértices**
 - ▶ E é uma relação binária em V , chamado de **conjunto de arestas**
- ▶ Em um **grafo não orientado** $G = (V, E)$, E consiste de pares de vértices não ordenados
- ▶ Os grafos podem ser representados graficamente
 - ▶ Os vértices são desenhados como círculos
 - ▶ As arestas são desenhadas como curvas ligando dois círculos, no caso de grafos orientados, as curvas tem um seta em uma das extremidades

6 / 26

Notas

Definições e propriedades

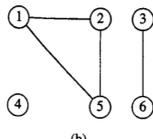
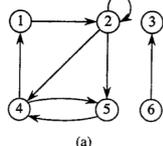


- ▶ Na figura a, qual é o conjunto de vértices e o conjunto de arestas? $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\})$
- ▶ Na figura b, qual é o conjunto de vértices e o conjunto de arestas? $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\})$

7 / 26

Notas

Definições e propriedades



- ▶ Observações
 - ▶ Em grafos orientados são permitidos autoloops (arestas de um vértice para ele mesmo). Exemplo: aresta (2, 2)
 - ▶ Um grafo orientado sem autoloops é chamado de **grafo simples**
 - ▶ Em grafos não orientados, autoloops não são permitidos
 - ▶ Na figura b, o vértice 4 é isolado
 - ▶ Para grafos não orientados, definimos a convenção de utilizar (u, v) para uma aresta, ao invés da notação de conjunto $\{u, v\}$. (u, v) e (v, u) são consideradas a mesma aresta

8 / 26

Notas

Definições e propriedades

- ▶ Para uma aresta (u, v) em um grafo orientado, dizemos que
 - ▶ (u, v) é **incidente do** ou **sai do** vértice u e é **incidente no** ou **entra no** vértice v
 - ▶ Quais as arestas que saem do vértice 2 na figura a? $(2, 2)$, $(2, 4)$ e $(2, 5)$
 - ▶ Quais as arestas que entram no vértice 2 na figura a? $(1, 2)$ e $(2, 2)$
- ▶ Para uma aresta (u, v) em um grafo não orientado, dizemos que
 - ▶ (u, v) é **incidente** nos vértices u e v
 - ▶ Quais as arestas incidentes no vértice 2 da figura b? $(1, 2)$ e $(2, 5)$

9 / 26

Notas

Definições e propriedades

- ▶ Para uma aresta (u, v) , dizemos que o vértice v é **adjacente** ao vértice u
- ▶ Para grafos não orientados, a relação de adjacência é simétrica
- ▶ Se v é adjacente a u em um grafo orientado, escrevemos $u \rightarrow v$
- ▶ O vértice 1 é adjacente ao vértice 2 na figura b? E na figura a? Sim. Não, pois não existe a aresta $(2, 1)$.

10 / 26

Notas

Definições e propriedades

- ▶ Em um grafo não orientado
 - ▶ O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes nele.
 - ▶ Na figura b, qual é o grau do vértice 2? 2
- ▶ Em um grafo orientado
 - ▶ O **grau de saída** de um vértice é o número de arestas que saem dele
 - ▶ O **grau de entrada** de um vértice é o número de arestas que entram nele
 - ▶ O **grau** de um vértice é soma do grau de saída e do grau de entrada
 - ▶ Na figura a, qual é o grau de entrada, o grau de saída e o grau do vértice 2? 2, 3 e 5

11 / 26

Notas

Caminhos e ciclos

- ▶ Um **caminho de comprimento k** de um vértice u até um vértice u' em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ de vértices tal que $u = v_0$, $u' = v_k$ e $(v_{i-1}, v_i) \in E$ para $i = 1, 2, \dots, k$
- ▶ O comprimento do caminho é a quantidade de aresta no caminho
- ▶ O caminho **contém** os vértice v_0, v_1, \dots, v_k e as arestas $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$
- ▶ Se existe um caminho p de u até u' , dizemos que u' é **acessível** a partir de u via p , ou $u \xrightarrow{p} u'$ se o grafo é orientado
- ▶ Um caminho é **simplex** se todos os vértices no caminho são distintos
- ▶ Exemplos da figura a: $\langle 1, 2, 5, 4 \rangle$ e $\langle 2, 5, 4, 5 \rangle$

12 / 26

Notas

Caminhos e ciclos

- ▶ Um **subcaminho** do caminho $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ é uma subsequência contígua de seus vértices
- ▶ Em um grafo orientado
 - ▶ Um caminho $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ forma um **ciclo** se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta
 - ▶ O ciclo é **simples** se além disso v_1, v_2, \dots, v_k são distintos
 - ▶ Dois caminhos $\langle v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0 \rangle$ e $\langle v'_0, v'_1, \dots, v'_{k-1}, v'_0 \rangle$ formam o mesmo ciclo se existe um inteiro j tal que $v_i = v'_{(i+j) \bmod k}$ para $i = 0, 1, \dots, k-1$
 - ▶ Considerando a figura a, dê dois caminhos que formam o mesmo ciclo que o caminho $\langle 1, 2, 4, 1 \rangle$. $\langle 2, 4, 1, 2 \rangle$ e $\langle 4, 1, 2, 4 \rangle$

13 / 26

Notas

Caminhos e ciclos

- ▶ Em um grafo não orientado
 - ▶ Um caminho $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ forma um **ciclo (simples)** se $k \geq 3$, $v_0 = v_k$ e v_1, v_2, \dots, v_k são distintos
- ▶ Um grafo sem ciclo é **acíclico**

14 / 26

Notas

Conexidade

- ▶ Um grafo não orientado é **conexo** se todo par de vértices está conectado por um caminho
- ▶ Os **componentes conexos** de um grafo são as classes de equivalência de vértices sob a relação "é acessível a partir de"
 - ▶ Na figura b quais são os componentes conexos? $\{1, 2, 5\}$, $\{3, 6\}$ e $\{4\}$
- ▶ Um grafo não orientado é conexo se tem exatamente um componente conexo
 - ▶ Todo vértice é acessível a partir de todos os outros vértices

15 / 26

Notas

Conexidade

- ▶ Um grafo orientado é **fortemente conexo** se cada um de dois vértices quaisquer é acessível a partir do outro
- ▶ Os **componentes fortemente conexos** de um grafo orientado são as classes de equivalência de vértices sob a relação "são mutuamente acessíveis"
- ▶ Um grafo orientado é fortemente conexo se ele só tem um componente fortemente conexo
 - ▶ Quais os componentes fortemente conexos da figura a? $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{3\}$ e $\{6\}$
 - ▶ Todos os pares de vértices em $\{1, 2, 4, 5\}$ são mutuamente acessíveis
 - ▶ Os vértices $\{3, 6\}$ não formam um componente fortemente conexo. Por quê? O vértice 6 não pode ser acessado a partir do vértice 3

16 / 26

Notas

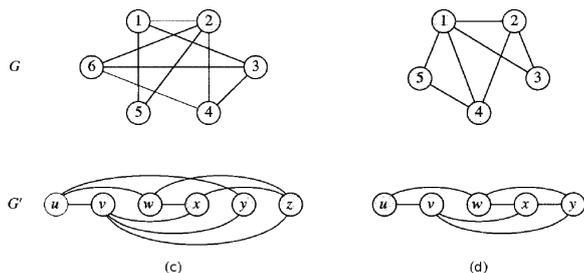
Isomorfismo

- ▶ Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são isomorfos se existe uma bijeção $f : V \rightarrow V'$ tal que $(u, v) \in E$ se e somente se $(f(u), f(v)) \in E'$
 - ▶ Podemos identificar novamente os vértices de G como vértices de G' , mantendo as arestas correspondentes em G e G'

17 / 26

Notas

Isomorfismo



- ▶ Os grafos da figura c são isomorfos entre si? Vejamos:
 - ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y, z\}$
 - ▶ $|V| = 6$ e $|V'| = 6$; $|E| = 9$ e $|E'| = 9$
 - ▶ Mapeamento de V para V' dado pela função bijetora $f(1) = u, f(2) = v, f(3) = w, f(4) = x, f(5) = y, f(6) = z$
 - ▶ Sim, são isomorfos

18 / 26

Notas

Isomorfismo

- ▶ Os grafos da figura d, são isomorfos?
 - ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $V' = \{u, v, w, x, y\}$
 - ▶ $|V| = 5$ e $|V'| = 5$; $|E| = 7$ e $|E'| = 7$
 - ▶ G tem um vértice de grau 4, mas G' não tem
 - ▶ Não são isomorfos

19 / 26

Notas

Subgrafos

- ▶ $G' = (V', E')$ é um **subgrafo** de $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$
- ▶ Dado um conjunto V' de modo que $V' \subseteq V$, o subgrafo de G **induzido** por V' é o grafo $G' = (V', E')$, onde $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$
- ▶ Qual é o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 6\}$ na figura a? Tem o conjunto de arestas $\{(1, 2), (2, 2), (6, 3)\}$

20 / 26

Notas

Versões orientada e não orientada

- ▶ Dado um grafo não orientado $G = (V, E)$, a **versão orientada** de G é o grafo orientado $G' = (V, E')$, onde $(u, v) \in E'$ se e somente se $(u, v) \in E$
 - ▶ Cada aresta não orientada (u, v) em G é substituída na versão orientada pelas duas arestas orientadas (u, v) e (v, u)
- ▶ Dado um grafo orientado $G = (V, E)$, a **versão não orientada** de G é o grafo não orientado $G' = (V, E')$, onde $(u, v) \in E'$ se e somente se $u \neq v$ e $(u, v) \in E$
 - ▶ A versão não orientada contém as arestas de G "com suas orientações removidas" e autoloops eliminados
 - ▶ Mesmo que o grafo orientado contenha as arestas (u, v) e (v, u) , o grafo não orientado conterá (u, v) somente uma vez

21 / 26

Notas

Vizinho

- ▶ Em um grafo orientado, um vizinho de um vértice u é qualquer vértice que seja adjacente a u na versão não orientada
 - ▶ v é vizinho de u se $(u, v) \in E$ ou $(v, u) \in E$
- ▶ Em um grafo não orientado, u e v são vizinhos se são adjacentes

22 / 26

Notas

Contração de aresta

A **contração** de um grafo não orientado $G = (V, E)$ por uma aresta $e = (u, v)$ é um grafo $G' = (V', E')$, onde:

- ▶ $V' = V - \{u, v\} \cup \{x\}$ e
- ▶ x é um novo vértice
- ▶ E' :
 - ▶ É formado a partir de E pela eliminação da aresta (u, v) e,
 - ▶ Para cada vértice w incidente em u ou v , eliminar o par dentre (u, w) e (v, w) que esteja em E e adicionando a nova aresta (x, w) a E'

23 / 26

Notas

Grafo com nomes especiais

- ▶ **Grafo completo** é um grafo não orientado no qual todo par de vértices é adjacente
- ▶ Um grafo completo com n vértices é chamado de K_n
- ▶ **Grafo bipartido** é um grafo não orientado $G = (V, E)$ em que V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tais que $(u, v) \in E$ implica que $u \in V_1$ e $v \in V_2$ ou $u \in V_2$ e $v \in V_1$
 - ▶ Todas as arestas ficam entre os dois conjuntos V_1 e V_2
- ▶ Um grafo acíclico não orientado é uma **floresta**
- ▶ Um grafo conexo acíclico não orientado é uma **árvore (livre)**
- ▶ **gao**: grafo acíclico orientado

24 / 26

Notas

Variantes de grafo

- ▶ Semelhantes a grafos não orientados
 - ▶ **Multigrafo**: pode ter várias arestas entre vértices e também autoloops
 - ▶ **Hipergrafo**: cada **hiperaresta**, em lugar de conectar dois vértices, conecta um subconjunto arbitrário de vértices

25 / 26

Notas

Referências

- ▶ Wikipedia - Seven Bridges of Königsberg
- ▶ Thomas H. Cormen et al. Introdução a Algoritmos. 2ª edição em português. Capítulo B.4.

26 / 26

Notas

Notas

Notas
