Análise de algoritmos

Quicksort

Notas

Conteúdo

Notas

Introdução

- Quicksort (ordenação rápida) é um algoritmo de ordenação
- Características
  - Tempo de execução no pior caso: $\Theta(n^2)$
  - Tempo de execução esperado: $\Theta(n \lg n)$
  - Os fatores constantes escondidos em $\Theta(n \lg n)$ são pequenos
  - Ordenação local
  - Funciona bem em ambientes de memória virtual

Notas

Descrição do quicksort

- Baseado no paradigma dividir para conquistar
- Para ordenar um array $A[p..r]$
  - **Dividir**: Particionar o array $A[p..r]$ em dois subarrays $A[p..q-1]$ e $A[q+1..r]$, tal que cada elemento de $A[p..q-1]$ seja $\leq A[q]$, e $A[q]$ seja $\leq$ que cada elemento de $A[q+1..r]$
  - **Conquistar**: Ordenar os dois subarrays recursivamente
  - **Combinar**: Como os subarrays são ordenados localmente, não é necessário nenhum trabalho para combiná-los
- A chave do algoritmo é o procedimento que faz o particionamento, que devolve o índice q que separa os subarrays

Notas

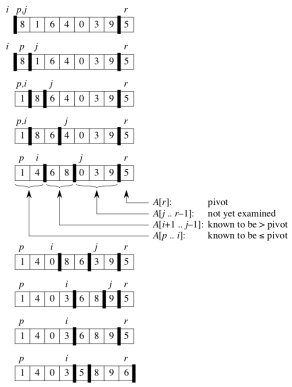
Procedimento quicksort

```
quicksort(A, p, r)
1 if p < r
2   q = partition(A, p, r)
3   quicksort(A, p, q - 1)
4   quicksort(A, q + 1, r)
```

Para ordenar todo um array A, a chamada inicial é `quicksort(A, 1, A.comprimento)`

Notas

Exemplo do funcionamento do procedimento partition



Notas

Procedimento partition

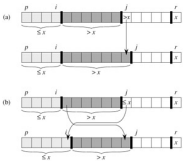
```
partition(A, p, r)
1 x = A[r]
2 i = p - 1
3 for j = p to r - 1
4  if A[j] <= x
5    i = i + 1
6    troca(A[i], A[j])
7 troca(A[i+1], A[r])
8 return i + 1
```

- Análise
  - O tempo de execução de `partition` sobre um subarray $A[p..r]$ é $\Theta(n)$, onde $n = r - p + 1$.

Notas

Procedimento partition

```
partition(A, p, r)
1 x = A[r]
2 i = p - 1
3 for j = p to r - 1
4  if A[j] <= x
5    i = i + 1
6    troca(A[i], A[j])
7 troca(A[i+1], A[r])
8 return i + 1
```



- Invariante de laço
  1. Todas as entrada em $A[p..i]$ são $\leq$ ao pivô
  2. Todas as entrada em $A[i+1..j-1]$ são $>$ ao pivô
  3. $A[r] =$ pivô
- **Inicialização**: Antes do início do laço todas as condições da invariante são satisfeitas, porque o r é o pivô e os subarrays $A[p..i]$ e $A[i+1..j-1]$ são vazios
- **Manutenção**: Durante a execução do laço, se $A[j] \leq$ pivô, então $A[j]$ e $A[i+1]$ são trocados e i e i são incrementados. Se $A[j] >$ pivô, apenas o j é incrementado
- **Término**: Quando o laço termina, $j = r$, todos os elementos de A estão particionados em uma das três casos: $A[p..i] \leq$ pivô, $A[i+1..j-1] >$ pivô e $A[r] =$ pivô.
- Veja a versão completa na página 118.

Notas

Desempenho do quicksort

- O tempo de execução do `quicksort` depende do particionamento dos subarrays
  - Se o particionamento é balanceado, o `quicksort` é executado tão rápido quanto o `merge-sort`
  - Se o particionamento não é balanceado, o `quicksort` é executado tão lento quanto o `insertion-sort`

Notas

Pior caso

- Ocorre quando os subarrays estão completamente desbalanceados
- Um subarray tem 0 elementos e outro tem $n - 1$
- Obtemos a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + T(0) + \Theta(n) \\ &= T(n-1) + \Theta(1) + \Theta(n) \\ &= \Theta(n^2) \end{aligned}$$

- Mesmo tempo de execução do `insertion-sort`
- Ocorre quando o array já está ordenado

Notas

Melhor caso

- Ocorre quando os subarrays estão balanceados
- Um subarray tem tamanho $\lfloor n/2 \rfloor$ e o outro tem tamanho $\lceil n/2 \rceil - 1$
- Obtemos a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T(n/2) + \Theta(n) \\ &= O(n \lg n) \qquad \text{caso 2 do teorema mestre} \end{aligned}$$

Notas

Particionamento balanceado

- O tempo médio de execução do quicksort é muito mais próximo do melhor caso do que do pior caso
- Suponha que o algoritmo de particionamento sempre produza uma divisão na proporção 9 para 1
- Obtemos a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(9n/10) + T(n/10) + \Theta(n) \\ &= O(n \lg n) \end{aligned}$$

- Porque o resultado é o mesmo de quando o particionamento é balanceado?
  - Vejamos a árvore de recursão

Notas

Árvore de recursão

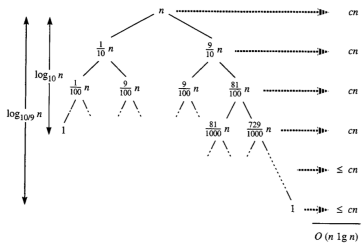


FIGURA 7.4 Uma árvore de recursão para QUICKSORT, na qual PARTITION sempre produz uma divisão de 9 para 1, resultando no tempo de execução $O(n \lg n)$. Os nós mostram tamanhos de subproblemas, com custos por nível à direita. Os custos por nível incluem a constante c implícita no termo $\Theta(n)$

Notas

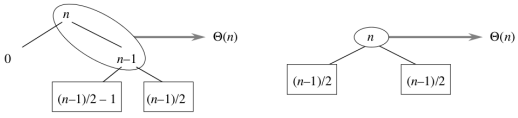
Particionamento balanceado

- O custo de cada nível é $O(n)$
- Temos $\log_{10} n$ níveis completos e $\log_{10/9} n$ níveis não vazios
- Desde que seja constante, a base do logaritmo não importa para a notação assintótica
- Qualquer divisão de proporção constante gerará uma árvore de recursão de profundidade $\Theta(\lg n)$

Notas

Intuição para o caso médio

- A proporção das divisões na árvore de recursão não será sempre constante
- No caso médio, haverá uma mistura de divisões boas e ruins
- Para facilitar o entendimento, suponha que que as divisões boas e ruins alternem seus níveis na árvore



- O custo da divisão ruim adiciona uma constante oculta na notação Θ
- Em ambas as figuras, o tempo de execução é $O(n \lg n)$

Notas

Versão aleatória do quicksort

- Para explorar o caso médio, assumimos que todas as permutações de entrada são igualmente possíveis
- O que nem sempre é verdade
- Para corrigir esta situação, adicionamos aleatoriedade ao quicksort
- A ideia é não usar sempre $A[r]$ como pivô. Ao invés, escolhemos um elemento do array aleatoriamente
- Como o pivô é escolhido aleatoriamente, esperamos que a divisão do array de entrada seja equilibrada na média

Notas

Versão aleatória do quicksort

```
randomized-partition(A, p, r)
1 i = random(p, r)
2 troca(A[r], A[i])
3 return partition(A, p, r)

randomized-quicksort(A, p, r)
1 if p < r
2   q = randomized-partition(A, p, r)
3   randomized-quicksort(A, p, q - 1)
3   randomized-quicksort(A, q + 1, r)
```


Notas

Análise do pior caso

- Vamos mostrar usando o método de substituição que uma divisão do pior caso em todos os níveis produz um tempo de execução $\Theta(n^2)$
- Podemos escrever a recorrência do pior caso como

$$T(n) = \max_{0 \le q \le n-1} (T(q) + T(n-q-1)) + \Theta(n)$$

onde o parâmetro q varia de 0 a $n-1$

- Vamos supor que $T(n) \le cn^2$
- Fazendo a substituição, obtemos

$$\begin{aligned} T(n) &\le \max_{0 \le q \le n-1} (cq^2 + c(n-q-1)^2) + \Theta(n) \\ &= c \max_{0 \le q \le n-1} (q^2 + (n-q-1)^2) + \Theta(n) \end{aligned}$$

Notas

Análise do pior caso

- O valor máximo de $(q^2 + (n-q-1)^2)$ ocorre quando q é 0 ou $n-1$, o que significa que

$$\begin{aligned} \max_{0 \le q \le n-1} (q^2 + (n-q-1)^2) &\le (n-1)^2 \\ &= n^2 - 2n + 1 \end{aligned}$$

- Logo

$$\begin{aligned} T(n) &\le c(n^2 - 2n - 1) + \Theta(n) \\ &= cn^2 - c(2n-1) + \Theta(n) \\ &\le cn^2 \qquad \text{se } c(2n-1) \ge \Theta(n) \end{aligned}$$

- Portanto, o tempo de execução do `quicksort` no pior caso é $O(n^2)$
- Podemos mostrar que $T(n) = \Omega(n^2)$, e portanto $T(n) = \Theta(n^2)$

Notas

Exercícios

7.1-1 Usando a figura 7.1 como modelo, ilustre a operação de `partition` sobre o array $A = \langle 13, 19, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 11, 2, 6, 21 \rangle$.

7.1-2 Que valor de q `partition` retorna quando todos os elementos no arranjo $A[p..r]$ têm o mesmo valor? Modifique `partition` de forma que $q = (p+r)/2$ quando todos os elementos no array $A[p..r]$ têm o mesmo valor.

7.1-3 Forneça um breve argumento mostrando que o tempo de execução de `partition` sobre um subarray de tamanho n é $\Theta(n)$.

7.1-4 De que maneira você modificaria `quicksort` para fazer a ordenação em ordem não crescente?

Notas

Exercícios

7.2-1 Use o método de substituição para provar que a recorrência $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$ tem a solução $T(n) = \Theta(n^2)$.

7.2-2 Qual o tempo de execução de `quicksort` quando todos os elementos do array A têm o mesmo valor.

7.2-3 Mostre que o tempo de execução de `quicksort` é $\Theta(n^2)$ quando o array A contém elementos distintos e está ordenado em ordem decrescente.

Notas

Exercícios

7.3-1 Por que analisamos o desempenho do caso médio de um algoritmo aleatório e não o seu desempenho no pior caso?

7.3-2 Durante a execução do procedimento `randomized-quicksort`, quantas chamadas são feitas ao gerador de números aleatórios `random` no pior caso? E no melhor caso? Dê a resposta em termos da notação Θ.

Notas

Exercícios

- Exercícios 7.1-1 a 7.1-4
- Exercícios 7.2-1 a 7.2-3
- Exercícios 7.3-1 a 7.3-2

Notas

Referências

- Thomas H. Cormen et al. Introdução a Algoritmos. 2ª edição em português. Capítulo 7.

Notas