Prova por Indução

Sumário

O que é uma prova?

Definition
Uma **prova** é uma argumento lógico convincente de que um enunciado é verdadeiro.

A única maneira de determinar a veracidade ou falsidade de um enunciado matemático é com uma prova matemática.

Métodos de prova

- Prova direta
- Prova por construção
- Prova por contradição
- Prova por exaustão
- Prova por indução

Definição

Definition

Uma **prova por indução** é um método avançado para mostrar que todos os elementos de um conjunto infinito têm uma propriedade especificada.

Example

- Expressões matemáticas equivalentes.
- Corretude de um algoritmo.

Ideia do funcionamento I

- Vamos tomar o conjunto infinito $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ e denominar a propriedade de $\mathcal{P}$.
- Queremos provar que $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), \dots$ é verdadeiro.
- Toda prova por indução é constituída de duas partes, o **passo de indução** e a **base**.
- Na base é provado que $\mathcal{P}(1)$ é verdadeiro.
- No passo de indução é mostrado que para cada $i \geq 1$, se $\mathcal{P}(i)$ é verdadeiro, então $\mathcal{P}(i+1)$ também é.

Quando os dois itens são provados (a base e o passo de indução), segue o resultado desejado, ou seja, que $\mathcal{P}(i)$ é verdadeiro para todo i. Por quê?

Ideia do funcionamento II

O caso $\mathcal{P}(1)$ é verdadeiro pois foi provado pela base. $\mathcal{P}(2)$ também é verdadeiro, porque o passo de indução prova que, se $\mathcal{P}(1)$ é verdadeiro, então $\mathcal{P}(2)$ também é, já sabemos que $\mathcal{P}(1)$ é verdadeiro. $\mathcal{P}(3)$ também é verdadeiro, porque o passo de indução prova que, se $\mathcal{P}(2)$ é verdadeiro, então $\mathcal{P}(3)$ também é, já sabemos que $\mathcal{P}(2)$ é verdadeiro. Este processo continua para todos os números naturais, mostrando que $\mathcal{P}(4)$ é verdadeiro, $\mathcal{P}(5)$ é verdadeiro, e assim por diante.

Generalizações

- A base não precisa começar com 1; ela pode começar com qualquer valor a. Neste caso a prova por indução mostra que $\mathcal{P}(k)$ é verdadeiro para todo $k \geq b$.
- No passo de indução, a suposição de que $\mathcal{P}(i)$ é verdadeiro é chamada de **hipótese da indução**. Ás vezes, queremos uma hipótese da indução mais forte, como $\mathcal{P}(j)$ é verdadeira para todo $j \leq i$. Neste caso a prova por indução ainda funciona, mas quando quisermos provar que $\mathcal{P}(i+1)$ é verdadeiro, já teremos provado que $\mathcal{P}(j)$ é verdadeiro para todo $j < i$ (pela hipótese de indução forte).

Exemplo I

Vamos mostrar usando indução que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
(Os comentários que aparacem entre parenteses não fazem parte da prova, mas tem o intuído de ajudar o leitor a compreender o processo.)

Base

Vamos tomar como base $n = 1$, obtemos que $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.
Logo a base é verdadeira. (Observe que o n foi substituído por 1 na igualdade que queremos mostrar e a igualdade foi confirmada.)

Exemplo I

Passo de indução

Como hipótese de indução, vamos assumir que a equação é válida para $n = i$, ou seja $1 + 2 + \cdots + i = \frac{i(i+1)}{2}$. Temos que mostrar que a equação é válida para $n = i + 1$, ou seja,
$1 + 2 + \cdots + i + (i+1) = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$.
(Substituímos n por i e depois n por $i + 1$ na igualdade que queremos mostrar).
(Neste momento, temos que partir da igualdade da hipótese de indução, que por hipótese é verdadeira, e concluir que a equação se mantém verdadeira quando $n = i + 1$. O objetivo é mostrar que a equação é válida para $n = i + 1$).

Exemplo I

Passo de indução - continuação

Partindo da hipótese de indução, vamos adicionar $i + 1$ a ambos os lados da igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \cdots + i &= \frac{i(i+1)}{2} && (1)\\
1 + 2 + \cdots + i + (i+1) &= \frac{i(i+1)}{2} + (i+1) && (2)\\
&= \frac{i(i+1)}{2} + \frac{2(i+1)}{2} && (3)\\
&= \frac{i(i+1) + 2(i+1)}{2} && (4)\\
&= \frac{(i+1)(i+2)}{2} && (5)
\end{aligned}$$

Exemplo I

Passo de indução - continuação

(Na equação (3) a fração $\frac{2}{2}$ foi adicionada multiplicando o termo $(i + 1)$. Na equação (5) o termo comum $(i + 1)$ foi posto em evidência.)
Portanto, concluímos que $1 + 2 + \cdots + i + (i+1) = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$, que é a igualdade que queríamos provar quando $n = i + 1$.

Conclusão

Como provamos a base e o passo de indução, concluímos a nossa prova de que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemplo II

Vamos mostrar usando indução que $\sum_{k=0}^{n} 3^k = O(3^n)$. Ou seja, $\sum_{k=0}^{n} 3^k \leq c3^n$, para alguma constante $c > 0$ (pela definição da notação O).

Base

Vamos tomar como base $n = 0$, obtemos que $\sum_{k=0}^{0} 3^k = 3^0 = 1 \leq c3^0 = c$. Logo se tomarmos $c \geq 1$, a base é verdadeira. (Observe que o n foi substituído por 0 na inequação que queremos mostrar e a desigualdade foi confirmada.)

Exemplo II

Passo de indução

Como hipótese de indução, vamos assumir que a inequação é válida para $n = i$, ou seja $\sum_{k=0}^{i} 3^k \leq c3^i$. Temos que mostrar que a inequação é válida para $n = i + 1$, ou seja, $\sum_{k=0}^{i+1} 3^k \leq c3^{i+1}$.
(Substituímos n por i e depois n por $i + 1$ na desigualdade que queremos mostrar).
(Neste momento, temos que partir da desigualdade da hipótese de indução, que por hipótese é verdadeira, e concluir que a inequação se mantém verdadeira quando $n = i + 1$. O objetivo é mostrar que a inequação é válida para $n = i + 1$).

Exemplo II

Passo de indução - continuação

Partindo da hipótese de indução, vamos adicionar 3^{i+1} a ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\sum_{k=0}^{i} 3^k \leq c3^i \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{i} 3^k + 3^{i+1} \leq c3^i + 3^{i+1} \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{i+1} 3^k \leq c3^i + 3^{i+1} \tag{8}$$

Exemplo II

Passo de indução - continuação

$$\sum_{k=0}^{i+1} 3^k \leq c3^i\frac{3}{3} + \frac{c}{c}3^{i+1} \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{i+1} 3^k \leq \frac{c3^{i+1}}{3} + \frac{c3^{i+1}}{c} \tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^{i+1} 3^k \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right) c3^{i+1} \tag{11}$$

(Na inequação (8) os termos da direita de (7) foram agrupados. Em (11) o termo $c3^{i+1}$ foi posto em evidência).

Exemplo II

Passo de indução - continuação

Baseado na hipótese de indução, obtemos que $\sum_{k=0}^{i+1} 3^k \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right) c3^{i+1}$, mas nós queremos mostrar que $\sum_{k=0}^{i+1} 3^k \leq c3^{i+1}$. Juntando as duas desigualdades, temos $\sum_{k=0}^{i+1} 3^k \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right) c3^{i+1} \leq c3^{i+1}$. Se encontrarmos c tal que $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right) c3^{i+1} \leq c3^{i+1}$ seja verdade, provamos o passo de indução.

Exemplo II

Passo de indução - continuação

Eliminando o termo $c3^{i+1}$, obtemos $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right) \leq 1$. Para que esta inequação seja verdade, basta tomar $c \geq \frac{3}{2}$.
Portanto, concluímos que existe constante c tal que $\sum_{k=0}^{i+1} 3^k \leq c3^{i+1}$, que é a desigualdade que queríamos provar quando $n = i + 1$.

Conclusão

Como provamos a base e o passo de indução, concluímos a nossa prova de que $\sum_{k=0}^{n} 3^k = O(3^n)$.

Referências

Introdução a Teoria da Computação. Michael Sipser. Tradução da 2 edição norte-americana. Editora Thomson.