Árvores e processamento simultâneo

Marco A L Barbosa

malbarbo.pro.br

Departamento de Informática

Universidade Estadual de Maringá

Este trabalho está licenciado com uma Licença Creative Commons - Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional.

http://github.com/malbarbo/na-progfun

Árvores binárias

Como podemos definir uma árvore binária?

Árvores binárias

Uma **ÁrvoreBinária** é

- `empty`; ou
- `(no Número ÁrvoreBinária ÁrvoreBinária)`, onde **`no`** é uma estrutura com os campos `valor`, `esq` e `dir`

```
(struct no (valor esq dir) #:transparent)
```

Modelo

```
(define (fn-para-ab t)
  (cond
    [(empty? t) ...]
    [else
      (... (no-valor t)
           (fn-para-ab (no-esq t))
           (fn-para-ab (no-dir t)))]))
```

Exemplo: altura árvore

Defina uma função que calcule a altura de uma árvore binária. A altura de uma árvore binária é a distância entre a raiz e o seu descendente mais afastado. Uma árvore com um único nó tem altura 0.

Exemplo: altura árvore

```
;;      t4  3
;;         /   \
;;  t3  4      7  t2
;;      /     / \
;;    3      8   9  t1
;;              /
;;        t0  10

(define t0 (no 10 empty empty))
(define t1 (no 9 t0 empty))
(define t2 (no 7 (no 8 empty empty) t1))
(define t3 (no 4 (no 3 empty empty) empty))
(define t4 (no 3 t3 t2))
```

```
;; ÁrvoreBinária -> Natural
;; Devolve a altura da árvore binária. A altura de
;; uma árvore binária é a distância da raiz a seu
;; descendente mais afastado. Uma árvore com um
;; único nó tem altura 0.
(examples
  (check-equal? (altura empty) ?)
  (check-equal? (altura t0) 0)
  (check-equal? (altura t1) 1)
  (check-equal? (altura t2) 2)
  (check-equal? (altura t3) 1)
  (check-equal? (altura t4) 3))
(define (altura t)
  (cond
    [(empty? t) ...]
    [else (... (no-valor t)
               (altura (no-esq t))
               (altura (no-dir t)))]))
```

Exemplo: altura árvore

```
;;     t4  3
;;        /   \
;;  t3   4      7   t2
;;      /      / \
;;     3      8   9   t1
;;               /
;;           t0  10

(define t0 (no 10 empty empty))
(define t1 (no 9 t0 empty))
(define t2 (no 7 (no 8 empty empty) t1))
(define t3 (no 4 (no 3 empty empty) empty))
(define t4 (no 3 t2 t3))
```

```
;; ÁrvoreBinária -> Natural
;; Devolve a altura da árvore binária. A altura de
;; uma árvore binária é a distância da raiz a seu
;; descendente mais afastado. Uma árvore com um
;; único nó tem altura 0. Uma árvore vazia tem
;; altura -1.
(examples
  (check-equal? (altura empty) -1)
  (check-equal? (altura t0) 0)
  (check-equal? (altura t1) 1)
  (check-equal? (altura t2) 2)
  (check-equal? (altura t3) 1)
  (check-equal? (altura t4) 3))
(define (altura t)
  (cond
    [(empty? t) -1]
    [else (add1 (max (altura (no-esq t))
                     (altura (no-dir t))))]))
```

Listas aninhadas

Listas aninhadas

Às vezes é necessário criar uma lista, que contenha outras listas, e estas listas contenham outras listas, etc.

```
> (list 1 4 (list 5 empty (list 2) 9) 10)
'(1 4 (5 () (2) 9) 10)
```

Chamamos este tipo de lista de lista aninhada. Como podemos definir uma lista aninhada?

Listas aninhadas

Uma **ListaAninhada** é

- `empty`; ou
- `(cons ListaAninhada ListaAninhada)`
- `(cons Número ListaAninhada)`

Modelo

```
(define (fn-para-ladn lst)
  (cond
    [(empty? lst) ...]
    [(list? (first lst))
     (... (fn-para-ladn (first lst))
          (fn-para-ladn (rest lst)))]
    [else
     (... (first lst)
          (fn-para-ladn (rest lst)))]))
```

Exemplo: soma*

Defina uma função que some todos os números de uma lista aninhada de números.

Exemplo: soma*

```
;; ListaAninhada -> Número
;; Devolve a soma de todos os elementos de lst.
(examples
 (check-equal? (soma* empty)
               0)
 (check-equal? (soma* (list (list 1 (list empty 3)) (list 4 5) 4 6 7))
               30))
(define (soma* lst)
  (cond
    [(empty? lst) ...]
    [(list? (first lst))
     (... (soma* (first lst))
          (soma* (rest lst)))]
    [else
     (... (first lst)
          (soma* (rest lst)))]))
```

Exemplo: soma*

```
;; ListaAninhada -> Número
;; Devolve a soma de todos os elementos de lst.
(examples
 (check-equal? (soma* empty)
               0)
 (check-equal? (soma* (list (list 1 (list empty 3)) (list 4 5) 4 6 7))
               30))
(define (soma* lst)
  (cond
    [(empty? lst) 0]
    [(list? (first lst))
     (+ (soma* (first lst))
        (soma* (rest lst)))]
    [else
     (+ (first lst)
        (soma* (rest lst)))]))
```

Exemplo: aplaina

Defina uma função que aplaine uma lista aninhada, isto é, transforme uma lista aninhada em uma lista sem listas aninhadas com os mesmos elementos e na mesma ordem da lista aninhada.

Exemplo: aplaina

```
;; ListaAninhada -> ListaDeNúmeros
;; Devolve uma versão não aninhada de lst, isto é, uma lista com os mesmos
;; elementos de lst, mas sem aninhamento.
(examples
 (check-equal? (aplaina empty) empty)
 (check-equal? (aplaina (list (list 1 (list empty 3)) (list 4 5) 4 6 7))
               (list 1 3 4 5 4 6 7)))
(define (aplaina lst)
  (cond
    [(empty? lst) ...]
    [(list? (first lst))
     (... (aplaina (first lst))
          (aplaina (rest lst)))]
    [else
     (... (first lst)
          (aplaina (rest lst)))]))
```

Exemplo: aplaina

```
;; ListaAninhada -> ListaDeNúmeros
;; Devolve uma versão não aninhada de lst, isto é, uma lista com os mesmos
;; elementos de lst, mas sem aninhamento.
(examples
 (check-equal? (aplaina empty) empty)
 (check-equal? (aplaina (list (list 1 (list empty 3)) (list 4 5) 4 6 7))
               (list 1 3 4 5 4 6 7)))
(define (aplaina lst)
  (cond
    [(empty? lst) empty]
    [(list? (first lst))
     (append (aplaina (first lst))
             (aplaina (rest lst)))]
    [else
     (cons (first lst)
           (aplaina (rest lst)))]))
```

Processamento simultâneo

Como implementar uma função que consome dois argumentos e os dois são de tipos com autorreferência? Temos três possibilidades:

1) Tratar um dos argumentos como atômico e utilizar o modelo do tipo de dado do outro argumento.
2) Processar os dois argumentos de forma sincronizada.
3) Considerar todos os casos possíveis.

Exemplo caso 1: concatenação

Projete uma função que concatene duas listas de números.

Exemplo: concatenação

```
;; ListaDeNúmeros ListaDeNúmeros -> ListaDeNúmeros
;; Produz uma nova lista com os elementos de lsta seguidos
;; dos elementos de lstb.
(examples
  (check-equal? (concatena empty
                           (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty))))
                (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty))))
  (check-equal? (concatena (cons 3 empty)
                           (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty))))
                (cons 3 (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty)))))
  (check-equal? (concatena (cons 7 (cons 3 empty))
                           (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty))))
                (cons 7 (cons 3 (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty)))))))
(define (concatena lsta lstb) empty)
```

Pelo propósito e pelos exemplos, qual dos argumentos pode ser tratado como atômico, isto é, não precisa ser decomposto? `lstb`.

Então usamos o modelo para processar `lsta`.

Exemplo: concatenação

```
;; ListaDeNúmero ListaDeNúmeros -> ListaDeNúmeros
;; Produz uma nova lista com os elementos de lsta seguidos
;; dos elementos de lstb.
(examples
  (check-equal? (concatena empty
                           (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty))))
                (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty))))
  (check-equal? (concatena (cons 3 empty)
                           (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty))))
                (cons 3 (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty)))))
  (check-equal? (concatena (cons 7 (cons 3 empty))
                           (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty))))
                (cons 7 (cons 3 (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty)))))))
(define (concatena lsta lstb)
  (cond
    [(empty? lsta) ... lstb]
    [else
      ... (first lsta)
          (concatena (rest lsta) lstb)]))
```

Exemplo: concatenação

```
;; ListaDeNúmero ListaDeNúmeros -> ListaDeNúmeros
;; Produz uma nova lista com os elementos de lsta seguidos
;; dos elementos de lstb.
(examples
  (check-equal? (concatena empty
                           (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty))))
                (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty))))
  (check-equal? (concatena (cons 3 empty)
                           (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty))))
                (cons 3 (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty)))))
  (check-equal? (concatena (cons 7 (cons 3 empty))
                           (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty))))
                (cons 7 (cons 3 (cons 10 (cons 4 (cons 6 empty)))))))
(define (concatena lsta lstb)
  (cond
    [(empty? lsta) lstb]
    [else
     (cons (first lsta)
           (concatena (rest lsta) lstb))]))
```

Exemplo: soma ponderada

Projete uma função que calcule a soma ponderada a partir de uma lista de números e uma lista de pesos.

Exemplo: soma ponderada

```
;; ListaDeNúmeros ListaDeNúmeros -> Número
;; Calcula a soma ponderada dos valores de lst cosiderando que cada
;; elemento de lst tem como peso o elemento correspondente em pesos.
;; Requer que lst e pesos tenham o mesmo tamanho

(examples
  (check-equal? (soma-ponderada empty empty) 0)
  (check-equal? (soma-ponderada (list 4) (list 2)) 8) ; (+ 0 (* 4 2))
  (check-equal? (soma-ponderada (list 3 4) (list 5 2)) 23) ; (+ (* 3 5) (* 4 2))
  (check-equal? (soma-ponderada (list 5 3 4) (list 1 5 2)) 28)) ; (+ (* 5 1) (* 3 5) (* 4 2))

(define (soma-ponderada lst pesos) 0)
```

O requisito de que `lst` e `pesos` têm o mesmo tamanho pode ser explorado no corpo inicial:

- Quando `lst` é vazia, `pesos` também é.
- Quando `lst` e `pesos` não são vazias, temos `(first lst)`, `(rest lst)`, `(first pesos)` e `(rest pesos)`
- Para a chamada recursiva, temos `(rest lst)` e `(rest pesos)`, que têm o mesmo tamanho.

Exemplo: soma ponderada

```
;; ListaDeNúmeros ListaDeNúmeros -> Número
;; Calcula a soma ponderada dos valores de lst cosiderando que cada
;; elemento de lst tem como peso o elemento correspondente em pesos.
;; Requer que lst e pesos tenham o mesmo tamanho

(examples
  (check-equal? (soma-ponderada empty empty) 0)
  (check-equal? (soma-ponderada (list 4) (list 2)) 8) ; (+ 0 (* 4 2))
  (check-equal? (soma-ponderada (list 3 4) (list 5 2)) 23) ; (+ (* 3 5) (* 4 2))
  (check-equal? (soma-ponderada (list 5 3 4) (list 1 5 2)) 28)) ; (+ (* 5 1) (* 3 5) (* 4 2))

(define (soma-ponderada lst pesos)
  (cond
    [(empty? lst) ...]
    [else
      ... (first lst)
          (first pesos)
          (soma-ponderada (rest lst) (rest pesos))]))
```

Exemplo: soma ponderada

```
;; ListaDeNúmeros ListaDeNúmeros -> Número
;; Calcula a soma ponderada dos valores de lst cosiderando que cada
;; elemento de lst tem como peso o elemento correspondente em pesos.
;; Requer que lst e pesos tenham o mesmo tamanho

(examples
  (check-equal? (soma-ponderada empty empty) 0)
  (check-equal? (soma-ponderada (list 4) (list 2)) 8) ; (+ 0 (* 4 2))
  (check-equal? (soma-ponderada (list 3 4) (list 5 2)) 23) ; (+ (* 3 5) (* 4 2))
  (check-equal? (soma-ponderada (list 5 3 4) (list 1 5 2)) 28)) ; (+ (* 5 1) (* 3 5) (* 4 2))

(define (soma-ponderada lst pesos)
  (cond
    [(empty? lst) 0]
    [else
      (+ (* (first lst)
            (first pesos))
         (soma-ponderada (rest lst) (rest pesos)))]))
```

Exemplo caso 3: prefixo

Dados duas listas `lsta` e `lstb`, defina uma função que verifique se `lsta` é prefixo de `lstb`, isto é `lstb` começa com `lsta`.

Exemplo: prefixo

Especificação

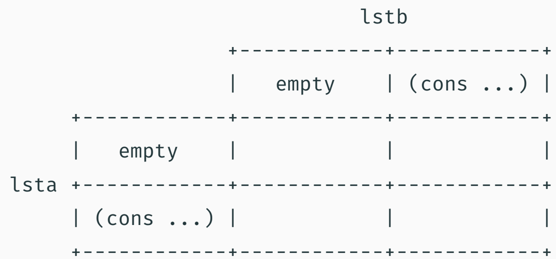
```
;; Lista Lista -> Boolean
;; Devolve #t se lsta é prefixo de lstb, #f caso contrário.
(define (prefixo? lsta lstb) #f)
```

Exemplo: prefixo

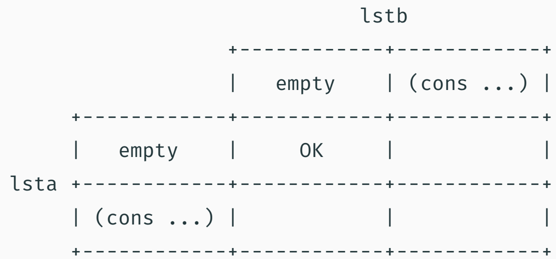
Exemplos

- Temos que ter pelo menos um exemplo para cada combinação das definições dos dados de entrada
- `lsta` pode ser `empty` ou um `cons`
- `lstb` pode ser `empty` ou um `cons`
- Como garantir que não vamos esquecer nenhum caso? Fazendo uma tabela!

Exemplo: prefixo



Exemplo: prefixo



```
                          lstb
                 +------------+------------+
                 |   empty    | (cons ...) |
     +-----------+------------+------------+
     |   empty   |     OK     |            |
lsta +-----------+------------+------------+
     | (cons ...)|            |            |
     +-----------+------------+------------+
```

```
(check-equal? (prefixo? empty empty) #t)
```

Exemplo: prefixo

```
                           lstb
                  +------------+------------+
                  |   empty    | (cons ...) |
      +-----------+------------+------------+
      |   empty   |     OK     |     OK     |
lsta  +-----------+------------+------------+
      | (cons ...)|            |            |
      +-----------+------------+------------+
```

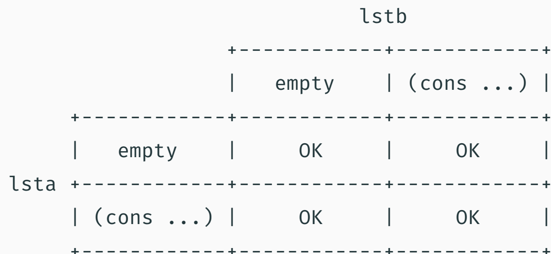
```
(check-equal? (prefixo? empty empty) #t)
(check-equal? (prefixo? empty (list 3 2 1)) #t)
```

Exemplo: prefixo

```
                      lstb
             +------------+------------+
             |   empty    | (cons ...) |
+------------+------------+------------+
|   empty    |     OK     |     OK     |
lsta +------------+------------+------------+
| (cons ...) |     OK     |            |
+------------+------------+------------+
```

```
(check-equal? (prefixo? empty empty) #t)
(check-equal? (prefixo? empty (list 3 2 1)) #t)
(check-equal? (prefixo? (list 3 2 1) empty) #f)
```

Exemplo: prefixo



		lstb: empty	lstb: (cons ...)
lsta	empty	OK	OK
lsta	(cons ...)	OK	OK

```
(check-equal? (prefixo? empty empty) #t)
(check-equal? (prefixo? empty (list 3 2 1)) #t)
(check-equal? (prefixo? (list 3 2 1) empty) #f)
(check-equal? (prefixo? (list 3 4) (list 3 4)) #t)
(check-equal? (prefixo? (list 3 4) (list 3 5)) #f)
(check-equal? (prefixo? (list 3 4) (list 3 4 6 8)) #t)
(check-equal? (prefixo? (list 3 5) (list 3 4 6 8)) #f)
(check-equal? (prefixo? (list 3 4 5) (list 3 4)) #f)
```

Implementação

Vamos começar criando um modelo com as quatro possibilidades

```
(define (prefixo? lsta lstb)
  (cond
    [(and (empty? lsta) (empty? lstb)) ...]
    [(and (empty? lsta) (cons? lstb)) ... lstb ...]
    [(and (cons? lsta) (empty? lstb)) ... lsba ...]
    [else ... lsta ... lstb ...]))
```

Este início é muito complicado...

Baseado nos exemplos, vamos preencher a tabela e derivar um código mais simples

Exemplo: prefixo

```
(check-equal? (prefixo? empty empty) #t)
(check-equal? (prefixo? empty (list 3 2 1)) #t)
(check-equal? (prefixo? (list 3 2 1) empty) #f)
(check-equal? (prefixo? (list 3 4) (list 3 4)) #t)
(check-equal? (prefixo? (list 3 4) (list 3 5)) #f)
(check-equal? (prefixo? (list 3 4) (list 3 4 6 8)) #t)
(check-equal? (prefixo? (list 3 5) (list 3 4 6 8)) #f)
(check-equal? (prefixo? (list 3 4 5) (list 3 4)) #f)
```

```
(check-equal? (prefixo? empty empty) #t)
(check-equal? (prefixo? empty (list 3 2 1)) #t)
(check-equal? (prefixo? (list 3 2 1) empty) #f)
(check-equal? (prefixo? (list 3 4) (list 3 4)) #t)
(check-equal? (prefixo? (list 3 4) (list 3 5)) #f)
(check-equal? (prefixo? (list 3 4) (list 3 4 6 8)) #t)
(check-equal? (prefixo? (list 3 5) (list 3 4 6 8)) #f)
(check-equal? (prefixo? (list 3 4 5) (list 3 4)) #f)
```

```
                          lstb
                  +------------+--------------------+
                  |    empty   |     (cons ...)     |
     +------------+------------+--------------------+
     |   empty    |     #t     |         #t         |
lsta +------------+------------+--------------------+
     | (cons ...) |     #f     |  primeiros iguais  |
     |            |            |     e recursão     |
     +------------+------------+--------------------+
```

Exemplo: prefixo

Simplificando ...

```
(define (prefixo? lsta lstb)
  (cond
    [(empty? lsta) #t]     ;; os casos foram
    [(empty? lstb) #f]     ;; escolhidos por ordem
    [else                  ;; de simplicidade
      (... (first lsta)
           (first lstb)
           (prefixo? (rest lsta) (rest lstb)))]))
```

Exemplo: prefixo

Completando a implementação ...

```
                              lstb
                +------------+--------------------+
                |    empty   |     (cons ...)     |
    +-----------+------------+--------------------+
    |   empty   |            #t                   |
lsta +-----------+------------+--------------------+
    | (cons ...) |     #f     |  primeiros iguais  |
    |           |            | e recursão natural |
    +-----------+------------+--------------------+
```

```
(define (prefixo? lsta lstb)
  (cond
    [(empty? lsta) #t]    ;; os casos foram
    [(empty? lstb) #f]    ;; escolhidos por ordem
    [else                 ;; de simplicidade
      (and (equal? (first lsta)
                   (first lstb))
           (prefixo? (rest lsta) (rest lstb)))]))
```

Exemplo: k-ésimo

Defina uma função que encontre o k-ésimo elemento de uma lista.

Especificação

```
;; ListaDeNúmeros Natural -> Número
;; Devolve o elemento na posição k da lst.
;; O primeiro elemento está na posição 0.
(define (lista-ref lst k) 0)
```

Exemplo: k-ésimo

Exemplos

```
;; ListaDeNúmeros Natural -> Número
;; Devolve o elemento na posição k da lst.
;; O primeiro elemento está na posição 0.
;;                              k
;;                 +-------------+--------------------+
;;                 |      0      |    (add1 ...)      |
;;     +-----------+-------------+--------------------+
;;     |   empty   |     OK      |         OK         |
;; lst +-----------+-------------+--------------------+
;;     | (cons ...) |     OK      |         OK         |
;;     +-----------+-------------+--------------------+
(check-exn exn:fail? (thunk (lista-ref empty 0)))
(check-exn exn:fail? (thunk (lista-ref empty 2)))
(check-equal? (lista-ref (list 3 2 8) 0) 3)
(check-equal? (lista-ref (list 3 2 8 10) 2) 8)
(check-exn exn:fail? (thunk (lista-ref (list 3 2 8 10) 4)))))
(define (lista-ref k lst) 0)
```

Exemplo: k-ésimo

Implementação

```
;; ListaDeNúmeros Natural -> Número
;; Devolve o elemento na posição k da lst.
;; O primeiro elemento está na posição 0.
;;                                k
;;                  +-------------+-------------------+
;;                  |      0      |    (add1 ...)     |
;;     +------------+-------------+-------------------+
;;     |   empty    |           erro                  |
;; lst +------------+-------------+-------------------+
;;     | (cons ...) | (first lst) |     recursão      |
;;     +------------+-------------+-------------------+
(check-exn exn:fail? (thunk (lista-ref empty 0)))
(check-exn exn:fail? (thunk (lista-ref empty 2)))
(check-equal? (lista-ref (list 3 2 8) 0) 3)
(check-equal? (lista-ref (list 3 2 8 10) 2) 8)
(check-exn exn:fail? (thunk (lista-ref (list 3 2 8 10) 4)))))
(define (lista-ref k lst) 0)
```

Exemplo: k-ésimo

```
;; ListaDeNúmeros Natural -> Número
;;                               k
;;                 +-------------+------------------+
;;                 |      0      |    (add1 ...)    |
;;     +-----------+-------------+------------------+
;;     |   empty   |           erro                 |
;; lst +-----------+-------------+------------------+
;;     | (cons ...) | (first lst) |     recursão     |
;;     +-----------+-------------+------------------+
(check-exn exn:fail? (thunk (lista-ref empty 0)))
(check-exn exn:fail? (thunk (lista-ref empty 2)))
(check-equal? (lista-ref (list 3 2 8) 0) 3)
(check-equal? (lista-ref (list 3 2 8 10) 2) 8)
(check-exn exn:fail? (thunk (lista-ref (list 3 2 8 10) 4))))
(define (lista-ref k lst)
  (cond
    [(empty? lst) (error "Lista vazia")]
    [(zero? k) (first lst)]
    [else (lista-ref (rest lst) (sub1 k))]))
```

Referências

Básicas

- Capítulo 23 HTDP
- Vídeos 2 one-of