Grafos planares

Algoritmos em Grafos

Marco A L Barbosa

Conteúdo

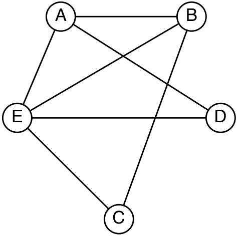
O estudo utilizando apenas este material **não é suficiente** para o entendimento do conteúdo. Recomendamos a leitura das referências no final deste material e a resolução (por parte do aluno) de todos os exercícios indicados.

Introdução

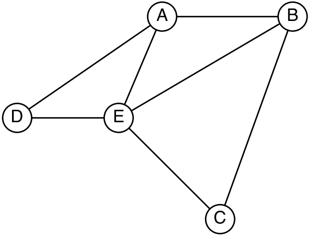
Introdução

- Uma **imersão** de um grafo G em uma superfície S é uma representação geométrica (desenho) de G em S tal que dois vértices distintos não ocupam o mesmo lugar em S e não existe cruzamento de arestas, a não ser nos extremos quando duas arestas são adjacentes
- Um grafo G é **planar** se ele tem imersão no plano ($\mathbb{R}^2$)
- As regiões limitadas por uma imersão planar são chamadas de **faces**
- Todo imersão planar têm uma face ilimitada denominada de **face externa**

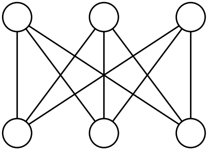
Exemplos



Desenho não planar



Desenho planar



Grafo não planar. Não é possível desenhar
este grafo sem cruzamento de arestas

Propriedades

Propriedades

- O **grau de uma face** é o tamanho mínimo de um caminho na fronteira da face

```
b ----- d ----- f ------- g
|       |       | 3       |
|   1   |   2   |    i    |  4
|       |       |    |    |
a ----- c ----- e -- h -- j
```

- A fronteira da face 2 tem as arestas *df*, *fe*, *ec*, *de*, então a face 2 tem grau 4
- A fronteira da face 3 tem as arestas *fg*, *gj*, *jh*, *hi*, *he*, *ef*, mas qualquer percurso na fronteira da face 3 deverá passar pela aresta *ih* duas vezes, como por exemplo, *fg*, *gj*, *jh*, *hi*, *ih*, *he*, *ef*. Portanto, o grau da face 3 é 7.

Propriedades

- Teorema 1 - Fórmula de Euler
  - Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com f faces, então $|V| + f = |E| + 2$
  - A discussão da prova foi feita em sala. Veja as referências

Propriedades

- Corolário 1
  - Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com $|V| \geq 3$, então $|E| \leq 3|V| - 6$

Propriedades

- Corolário 1
  - Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com $|V| \geq 3$, então $|E| \leq 3|V| - 6$

- Prova
  - Seja W a soma dos graus das faces do grafo, temos que $W = 2|E|$. Cada aresta separa duas faces, com exceção das arestas prego (como as arestas *ih* do exemplo anterior), mas neste caso a aresta é contada duas vezes no grau da face
  - Cada face tem grau pelo menos 3, portanto $3f \leq W$, como $W = 2|E|$, então $3f \leq 2|E|$
  - Substituindo f por $\frac{2|E|}{3}$ na fórmula de Euler, obtemos

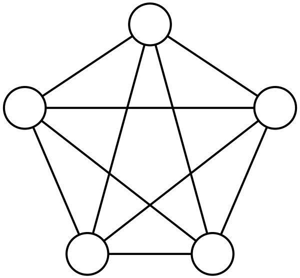
$$|V| + \frac{2|E|}{3} \leq |E| + 2$$

$$3|V| + 2|E| \leq 3|E| + 6$$

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

Propriedades

Podemos usar o Corolário 1 para mostrar que o K_5 é não planar. O K_5 tem 5 vértices e 10 arestas, desta foma $3|V| - 6 = 9$, o que implica que $|E| \leq 3|V| - 6$ é falso. Portanto, o K_5 é não planar.



Propriedades

- Corolário 2
  - Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com $|V| \geq 3$ e sem ciclos de tamanho 3, então $|E| \leq 2|V| - 4$.

Propriedades

- Corolário 2
  - Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com $|V| \geq 3$ e sem ciclos de tamanho 3, então $|E| \leq 2|V| - 4$.

- Prova
  - Semelhante a do corolário 2
  - $W = 2|E|$
  - Cada face tem grau pelo menos 4 (não tem ciclos de tamanho 3), portanto, $4f \leq W$, como $W = 2|E|$, então $4f \leq 2|E|$ e $2f \leq |E|$
  - Substituindo f por $\frac{|E|}{2}$ na fórmula de Euler, obtemos

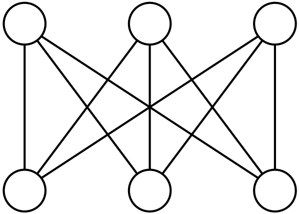
$$|V| + \frac{|E|}{2} \leq |E| + 2$$

$$2|V| + |E| \leq 2|E| + 4$$

$$|E| \leq 2|V| - 4$$

Propriedades

O $K_{3,3}$ não tem faces (ciclos) de tamanho 3. Podemos usar o Corolário 2 para mostrar que o $K_{3,3}$ é não planar. O $K_{3,3}$ tem 6 vértices e 9 arestas, desta foma $9 \leq 2 \times 6 - 4 = 8$, o que não é verdade. Portanto, o $K_{3,3}$ é não planar.



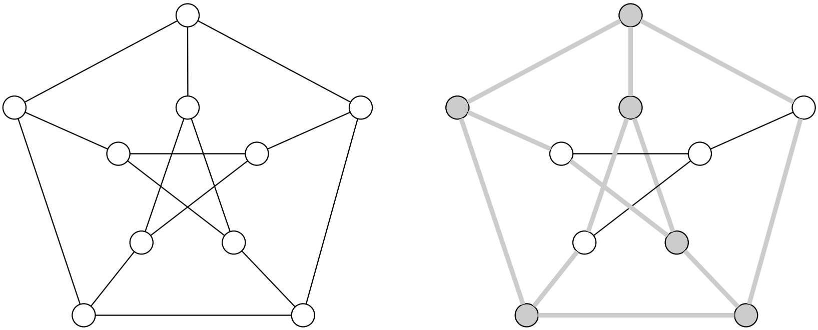
Propriedades

- Uma **operação de subdivisão** de uma aresta $e = (u, v)$ é uma substituição de e por um novo vértice w e duas novas arestas (u, w) e (w, v)
- Uma **subdivisão** de um grafo G é um grafo H que pode ser obtido a partir de G por uma sequência finita de operações de subdivisão de arestas

Propriedades

- Teorema de Kuratowski
  - Um grafo G é planar se, e somente se, ele não contém uma subdivisão do $K_{3,3}$ e do K_5.

Exemplo



Grafo de Pertersen não é planar porque
contém uma subdivisão do K3,3

- Veja uma animação

Métodos de teste de planaridade

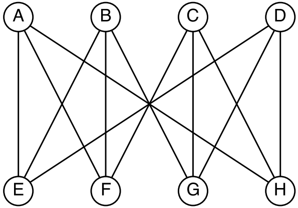
Métodos de teste de planaridade

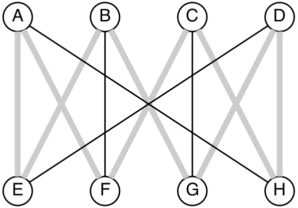
- Dado um grafo $G = (V, E)$, o **problema do teste de planaridade** consiste em determinar se G é planar
- Existem diversos algoritmos com tempo de execução $O(V + E)$
  - Algoritmo clássico baseado em adição de caminhos (Hopcroft e Tarjan, 1974)
  - Baseado em adição de vértices (Lempel, Even e Cederbaum, 1967, melhorado por Eve e Tarjan, 1976, e Booth e Lueker)
  - Baseado em adição de arestas (Boyer e Myrvold, 2004), considerado como estado da arte
- Estes algoritmos são bastante elaborados, difíceis de entender e implementar
- Para grafos pequenos, podemos testar manualmente se um grafo é planar usando o método heurístico círculo-corda

Método círculo-corda para teste de planaridade

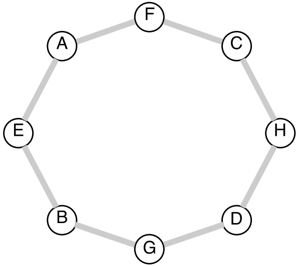
- O método círculo-corda consiste em
  - Passo 1: Encontrar um ciclo que contém todos os vértices do grafo e desenhá-lo como um círculo
  - Passo 2: O restante das arestas que não estão círculo, chamadas de cordas, deve ser desenhas ou do lado de dentro ou do lado de fora do círculo, de maneira que o desenho seja planar
- Observe-se que este é um método heurístico, nem todos os grafos planares podem ser desenhados com este método

Exemplo

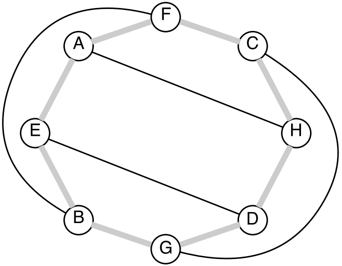




Identificação de um ciclo com todos os vértices



Desenho do ciclo em forma de círculo



Desenho das arestas restantes

Medidas de não planaridade

Medidas de não planaridade

- Quando um grafo não é planar, uma questão interessante é: o quão longe de ser planar o grafo está?
- Algumas medidas de não planaridade
  - Número mínimo de cruzamento de arestas para um desenho no plano ($cr(G)$ - o *crossing number* de G)
  - Número mínimo de arestas cuja remoção do grafo resulta em um grafo planar ($sk(G)$ - a *skewness* de G)
  - Número mínimo de operações de divisões de vértices que obtêm um grafo planar ($sp(G)$ - o *splitting number* de G)
- Pela definição destas medidas, podemos observar que $sp(G) \leq sk(G) \leq cr(G)$
- Os problemas de otimização relacionados com o número mínimo de cruzamento, número mínimo de remoção de arestas e número mínimo de divisão de vértices são NP-difícies

Referências

Referências

- Grafos planares. Livro Building Blocks for Theoretical Computer Science. Margaret M. Fleck. Capítulo 21.
- Grafos planares. Wikipédia. https://en.wikipedia.org/wiki/Planar_graph
- Teste de planaridade. Wikipédia. https://en.wikipedia.org/wiki/Planarity_testing