## Grafo Euleriano

Um caminho simples ou um circuito simples é dito *euleriano* se ele contém todas as arestas de um grafo. Um grafo que contém um circuito euleriano é um *grafo euleriano*. Um grafo que não contém um circuito euleriano, mas contém um caminho euleriano será chamado *grafo semi-euleriano*. As figuras 1a e 1b ilustram grafos euleriano e semi-euleriano, respectivamente.

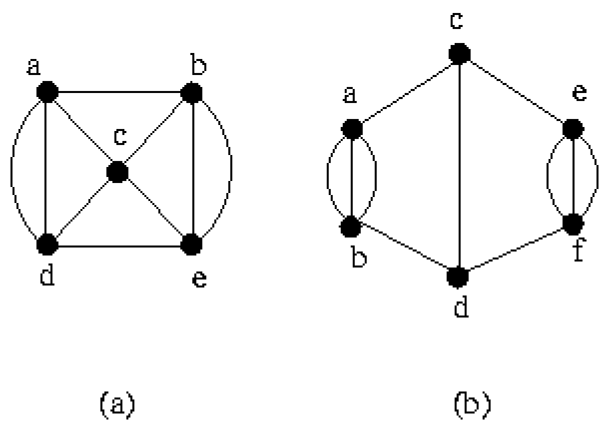
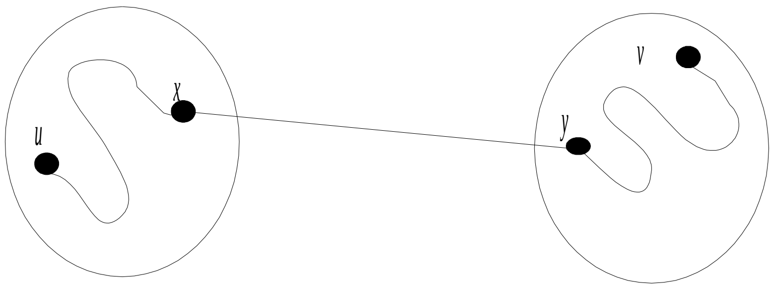



Figura 1

Por definição, um caminho é sempre conexo. Como um circuito euleriano contém todas as arestas de um grafo, um grafo euleriano é sempre conexo, com a exceção dos vértices isolados.

**Lema 1**: *Dado um grafo conexo com todos os vértices de grau par, então qualquer par de vértice faz parte de um caminho simples e fechado.*

*Prova*: (Por contradição). Suponha que exista um par de vértices *u* e *v* que não admitem um circuito simples em comum. Como o grafo é conexo, então existe um caminho que liga *u* e *v*. Portanto, existe uma aresta (*x*,*y*) cuja a remoção desconexa o grafo, caso contrário haveria um outro caminho disjunto alternativo ligando *u* e *v*.




Portanto, a remoção da aresta (*x*,*y*) desconexa grafo gerando duas componentes conexas, sendo o vértice x e y pertencentes a componentes diferentes. Com isso, ambos os vértices passarão a ser os únicos vértices de grau ímpar. Isso contradiz o fato que o número de vértices de grau ímpar de um subgrafo deva ser par. C.Q.D.

**Teorema 1:** *Um grafo conexo G é um grafo euleriano se e somente se todo vértice de G possui grau par.*

**Prova**:

*Ida:* Seja G um grafo euleriano. Logo ele contém um circuito euleriano. Por cada ocorrência de vértice desse caminho, existe uma aresta que chega nesse vértice e outra que sai desse vértice.

Como toda aresta faz parte do caminho, isto é, nenhuma aresta fica fora do caminho, necessariamente o número de arestas incidentes em cada vértice é par.

*Volta:* Como todo vértice possui grau par, então na construção de um caminho sempre é possível chegar e sair de um vértice por arestas diferentes ainda não utilizada. Assim, é possível sair de vértice *v* e retornar a ele sem repetição de arestas (Lema 1). Seja $C_1$ um circuito contendo *v* construído de maneira arbitrária. Logo, se $C_1$ contém todas as arestas de G, temos um circuito euleriano. Senão, retiramos de G todas as arestas que fazem parte de $C_1$. No grafo resultante G', todos os vértices também possuem grau par e necessariamente um deles faz parte de $C_1$, senão o grafo não seria conexo. Recomecemos o mesmo processo com o grafo G', partindo de um vértice comum com $C_1$, obtendo assim um novo circuito $C_2$. A figura 2 mostra que dois circuitos que têm um vértice em comum podem formar um circuito único: chegando no vértice comum em um dos dois circuitos, continuamos o percurso no outro circuito. Continuando esse processo, necessariamente obteremos um circuito único que contém todas as arestas de *G*. Logo o grafo é euleriano. C.Q.D.

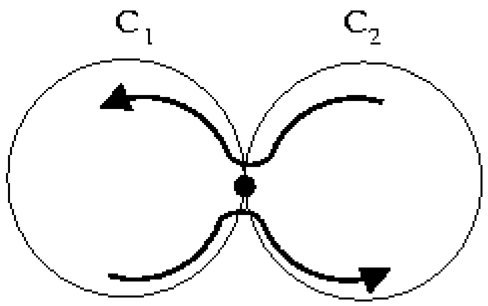



Figura 2

Um aspecto muito interessante dessa prova é que ela sugere um algoritmo para identificar um circuito euleriano. Considere por exemplo o grafo ilustrado na figura 3a.

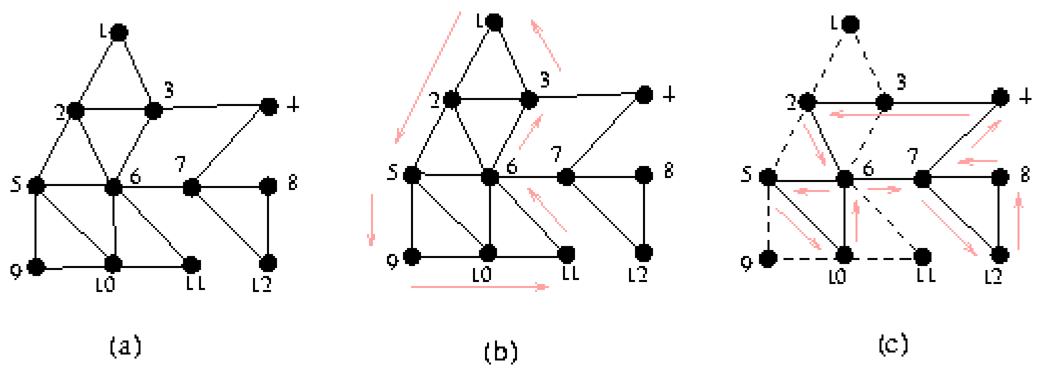



Figura 3

Supondo que começamos pelo vértice 1, e escolhemos aleatoriamente um aresta nunca visitada a cada vértice visitado, até voltar ao vértice 1 sem poder sair mais. A figura 3b mostra um circuito obtido, que consiste na sequência 1, 2, 5, 9, 10, 11, 6, 3 e 1. Como sobram arestas não percorridas, devemos recomeçar a partir de um vértice desse circuito. Supondo que o vértice 6 foi escolhido, podemos obter, como ilustrado na figura 3c, o circuito 6, 7, 12, 8, 7, 4, 3, 2, 6, 5, 10 , 6. Combinando esses circuito com o que já tínhamos, obtemos um novo circuito 1, 2, 5, 9, 10, 11, 6, 7, 12, 8, 7, 4, 3, 2, 6, 5, 10, 6, 3, 1. Como esse circuito cobre o grafo inteiro, não é preciso recomeçar o processo: já temos o nosso circuito euleriano.

Esse algoritmo é conhecido como o algoritmo de Hierholzer. Suponhamos que um caminho de um vértice $v_1$ até $v_k$ é representado por uma lista [$v_1$, $a_1$,..., $a_{k-1}$, $v_k$], que alterna vértices e arestas. Eis uma descrição do algoritmo de Hierholzer (supondo que já sabemos que o grafo é euleriano):

**função** *Hierholzer*(G = (V,E): *grafo*) : *caminho*

G' := G { G' = (V', E')}
$v_0$ := um vértice de G'
C := [$v_0$] {Inicialmente, o circuito contém só $v_0$}
**Enquanto** E' não vazio

> $v_i$ := um vértice de C tal que d($v_i$) > 0 em G'
> C' := Circuito em G' que contém $v_i$
> G' := G' - {a | a é aresta contida em C'}
> Em C, substituir o vértice $v_i$ pelo circuito C'

**Retornar** C

**Complexidade do Algoritmo de Hierholzer**

(Exercício em sala de aula)

## O Problema do Carteiro Chinês

As aplicações dos caminhos eulerianos se relacionam, basicamente, com problemas de atendimento sequencial, sobre um conjunto de usuários de um serviço oferecido no interior de uma rede de tráfego, tais como, entrega de correio, coleta de lixo, vendas por atacado, etc.

Um problema interessante ligado ao conceito de grafo semi-euleriano é o Problema do Carteiro Chinês. Imagine um carteiro que deve percorrer um roteiro todo dia. O problema é de identificar esse roteiro de maneira a minimizar a distância total percorrida. Essa situação pode ser representada por um grafo onde as arestas correspondem às ruas e os vértices correspondem aos cruzamentos.

Se o grafo é euleriano, a solução consiste simplesmente em achar um circuito euleriano. Mais interessante é o caso de um grafo não euleriano. Consideremos por exemplo um grafo semi-euleriano, como ilustrado na figura 4. Supondo que o carteiro quer voltar ao lugar de origem, portanto com certeza para cada um dos vértices 1 e 8, uma das arestas adjacentes será atravessada no mínimo duas vezes.

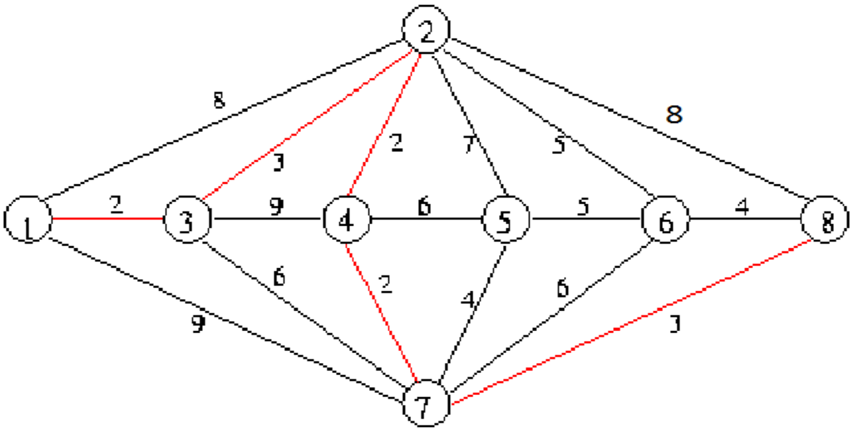



Figura 4

Uma solução ao problema é a seguinte. Transforme o grafo em grafo euleriano, duplicando as arestas que formam o caminho mais curto entre os dois vértices de grau ímpar. Esse caminho é indicado em vermelho na figura 4. O grafo assim obtido é euleriano. Agora podemos aplicar um dos algoritmos de identificação de circuito euleriano.

Portanto, dado um grafo $G=(V,E)$ conexo com custo nas arestas, o objetivo do ***Problema do Carteiro Chinês*** é encontrar um caminho fechado de custo mínimo passando por cada aresta pelo menos uma vez.

**Solução 1**: Se o grafo for de Euler, então o caminho pode ser encontrado, e consequentemente, o seu respectivo custo, através do algoritmo de Hierholzer. O custo é dado pela soma dos custos de todas as arestas do grafo.

**Solução 2**: Se o grafo não for de Euler, então algumas arestas terão que ser repetidas. A maneira clássica de resolver este problema é acrescentando arestas artificiais ao grafo original de forma a obter um novo grafo $G'=(V,E')$. Isto deve ser feito de maneira que as arestas artificiais acrescentadas transformem todos os vértices de grau ímpar de G, em vértices de grau par. As arestas artificiais correspondem aos eventuais percursos repetidos de custo mínimo entre pares de vértices de grau impar.

Algoritmo para o Problema do Carteiro chinês

P1. Identifique os vértices de grau ímpar. Digamos que existam $\alpha$ vértices de grau ímpar.

P2. Determine as combinações possíveis de vértices de grau ímpar, interligando-os com arestas artificiais, formando grafos expandidos, contendo somente vértices de graus par.

P3. Selecione o grafo $G=(V,E)$ expandido que apresentar a menor extensão total das arestas artificiais.

P4. Determine um roteiro de Euler par o grafo $G=(V, E)$.

Observe que as possíveis combinações de vértices de grau ímpares podem ser um número muito grande. Supondo que o grafo tenha $2k$ vértices de grau ímpar, em geral, o número $r$ de percursos é dado por:

$$r = \frac{2k!}{2^k.k!} = (2k-1)(2k-3)\ldots 3.1$$

Para ter uma ideia, observe estes exemplos:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| # de vértices = 2k | 4 | 6 | 8 | 10 | 20 |
| # de combinações | 3 | 15 | 105 | 945 | $655\text{x}10^6$ |

A enumeração total torna-se rapidamente inviável.

Para problemas pequenos, ou seja, número pequeno de vértices de grau ímpar, por inspeção do grafo é geralmente fácil achar a combinação de custo mínimo, ou seja, a introdução de arestas artificiais.

## Algoritmos de Emparelhamento.

Considere um grafo completo $K_\alpha$ , sendo $\alpha$ o número de vértices de grau ímpar encontrados no grafo original. Cada aresta do grafo $K_\alpha$ deve representar um caminho de custo mínimo entre os vértices de grau ímpar do grafo original. Portanto, encontrar a melhor combinação de pares de vértices (arestas artificiais) significa encontrar um emparelhamento de custo mínimo com $\alpha/2$ arestas em $K_\alpha$. Este problema pode facilmente ser transformado em um problema de emparelhamento de peso máximo (*Maximum Weight Matching*). Para isto, na literatura podem ser encontrados algoritmos de complexidade polinomial. Porém, a implementação destes algoritmos não é trivial. Sendo assim, não trataremos sobre isso neste curso. Aos interessados, sugere-se uma bibliografia especializada, ou até mesmo na internet é possível encontrar exemplares de algoritmos para este problema.

**Exercício 1**. Se um grafo orientado é euleriano, ele é fortemente conexo. Esta afirmativa está correta? Por quê? A recíproca é verdadeira? Por quê?