Grafos

Árvores espalhadas mínimas

Notas

Conteúdo

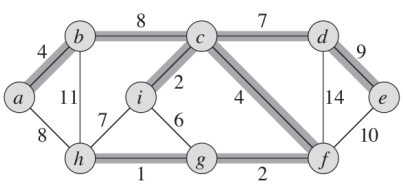
Notas

Introdução

- Dado um grafo conectado não orientado $G = (V, E)$ e uma função peso $w : E \to R$, queremos encontrar um subconjunto acíclico $T \subseteq E$ que conecte todos os vértices e cujo peso total $w(T) = \sum_{(u,v)\in T} w(u, v)$ seja minimizado
- Como T é acíclico e conecta todos os vértices, T forma uma árvore, que chamamos de **árvore geradora mínima** (MST)
- Chamamos o problema de determinar T de **problema da árvore geradora mínima**
- Veremos dois algoritmos gulosos para resolver este problema
  - Algoritmo de Kruskal
  - Algoritmo de Prim

Notas

Exemplo de árvore geradora mínima



- Propriedades de uma MST
  - Tem $|V| - 1$ arestas
  - Não tem ciclos
  - Pode não ser única

Notas

Como construir uma árvore geradora mínima

- Como construir uma árvore geradora mínima? Uma aresta de cada vez!
- Começamos com um conjunto vazio A
- Em cada etapa, determinamos um aresta (u, v) que pode ser adicionada a A, de forma a manter a seguinte invariante
  - Antes de cada iteração, A é um subconjunto de alguma árvore geradora mínima
- A aresta (u, v) é chamada de **aresta segura** para A

```
generic-mst(G, w)
1 A = ∅
2 while A não forma uma árvore geradora
3     encontre uma aresta (u, v) que seja segura para A
4     A = A ∪ {(u, v)}
5 return A
```

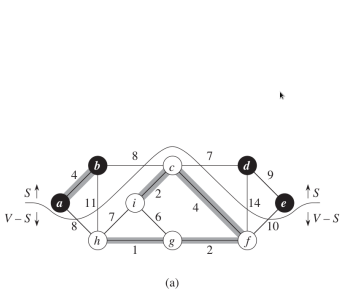

Notas

Como construir uma árvore geradora mínima

- Vamos fornecer uma regra para reconhecer arestas seguras, mas antes precisamos de algumas definições
- Seja $S \subset V$ e $A \subseteq E$
- Um **corte** $(S, V - S)$ de um grafo não orientado $G = (V, E)$ é uma partição de V
- Uma aresta $(u, v) \in E$ **cruza** o corte $(S, V - S)$ se um de seus extremos está em S e o outro em $V - S$
- Um corte **respeita** o conjunto A de arestas se nenhuma aresta em A cruza o corte
- Uma aresta é uma **aresta leve** cruzando um corte se seu peso é o mínimo de qualquer aresta que cruza o corte

Notas

Como construir uma árvore geradora mínima



Notas

Como construir uma árvore geradora mínima

Teorema 23.1
Seja $G = (V, E)$ um grafo conectado não orientado com uma função peso de valor real w definido em E. Seja A um subconjunto de E que está incluído em alguma árvore geradora mínima correspondente a G, seja $(S, V - S)$ qualquer corte de G que respeita A e seja (u, v) uma aresta leve cruzando $(S, V - S)$. Então a aresta (u, v) é segura para A

Ideia da prova

- Seja T uma MST que inclui A
  - Se T contém (u, v), é claro que (u, v) é segura para A
  - Se T não contém (u, v), construímos outra MST T' que inclui $A \cup \{(u, v)\}$ (veja o livro)

Notas

Como construir uma árvore geradora mínima

Corolário 23.2
Seja $G = (V, E)$ um grafo conectado não orientado com uma função peso de valor real w definido em E. Seja A um subconjunto de E que está incluído em alguma árvore geradora mínima correspondente a G, e seja $C = (V_C, E_C)$ um componente conectado (árvore) na floresta $G_A = (V, A)$. Se (u, v) é uma aresta leve conectando C a algum outro componente em G_A, então (u, v) é segura para A

Prova
Tomamos $S = V_C$ no teorema 23.1

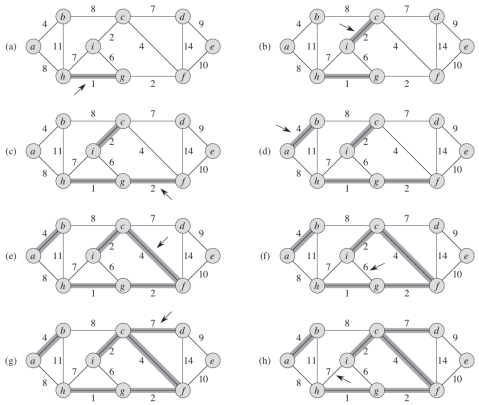
Notas

Algoritmo de Kruskal

- Se baseia diretamente no algoritmo genérico apresentado
- Inicialmente cada vértice está em sua própria componente (árvore)
- De todas as arestas que conectam duas árvores quaisquer na floresta, uma aresta (u, v) de peso mínimo é escolhida. A aresta (u, v) é segura para alguma das duas árvores
- Utiliza uma estrutura de dados de conjuntos disjuntos
- Cada conjunto contém os vértices de uma árvore da floresta atual

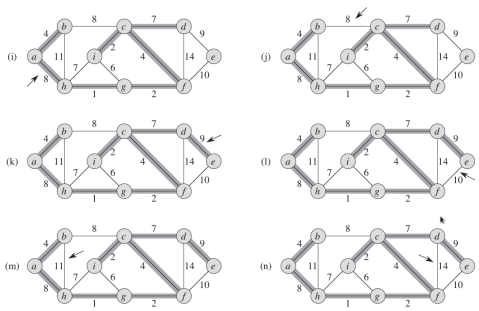
Notas

Algoritmo de Kruskal



Notas

Algoritmo de Kruskal



Notas

Algoritmo de Kruskal

```
mst-kruskal(G, w)
1  A = 0
2  for cada vértice v em G.V
3    make-set(v)
4  ordenar por peso as arestas de E
5  for cada aresta (u, v) em E, em ordem de peso
6    if find-set(u) != find-set(v)
7      A = A U {(u, v)}
8      union(u, v)
9  return A
```


Notas

Análise do algoritmo de Kruskal

- Depende da implementação da estrutura de conjunto disjuntos
- A ordenação das arestas na linha 4 demora $O(E \lg E)$
- O laço das linhas 5 a 8 executa $O(E)$ `find-set` e `union`. Juntamente com as $|V|$ operações `make-set`, elas demoram $O((V + E)\alpha(V))$, onde α é uma função de crescimento muito lento
- Pelo fato de G ser supostamente conectado, $|E| \geq |V| - 1$
- Como $\alpha(|V|) = O(\lg V) = O(\lg E)$, o tempo total de execução do algoritmo é $O(E \lg E)$
- Observando que $|E| < |V^2|$, temos que $\lg |E| = O(\lg V)$, e portanto, o tempo de execução do algoritmo é $O(E \lg V)$

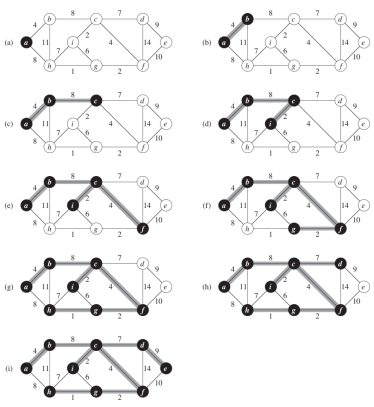
Notas

Algoritmo de Prim

- Se baseia diretamente no algoritmo genérico apresentado
- As arestas do conjunto A formam uma única árvore
- A árvore começa com uma raiz arbitrária r e aumenta até alcançar todos os vértices em V
- Para cada vértice v, $v.\texttt{chave}$ é o peso mínimo de qualquer aresta que conecta v a um vértice da árvore; $v.\texttt{chave} = \infty$ se não existe nenhuma aresta deste tipo
- A chave para implementar o algoritmo de Prim de forma eficiente é tornar fácil a seleção de uma nova aresta a ser adicionada à árvore

Notas

Algoritmo de Prim



Notas

Algoritmo de Prim

```
mst-prim(G, w, r)
 1  for cada u em G.V
 2    u.chave = infinito
 3    u.pai = NIL
 4  r.chave = 0
 5  Q = G.V
 6  while Q != 0
 7    u = extract-min(Q)
 8    for cada v em u.adj
 9      if v em Q e w(u, v) < v.chave
10        v.pai = u
11        v.chave = w(u, v)
```


Notas

Análise do algoritmo de Prim

- Depende de como a fila de prioridade é implementada
- Se a fila é implementada como um heap mínimo, o algoritmo `build-min-heap` é utilizado na inicialização nas linhas 1 a 5 no tempo $O(V)$
- O corpo do laço while é executado $|V|$ vezes, como cada operação `extract-min` demora $O(\lg V)$, o tempo total para todas as chamadas de `extract-min` é $O(V \lg V)$
- O laço for das linhas 8 a 11 é executado completamente $O(E)$ vezes
- O teste de pertinência da linha 9 pode ser implementa em tempo constante
- A atribuição na linha 11 envolve uma operação implícita de `decrease-key`, que demora $O(\lg V)$
- Portanto, o tempo total do algoritmo é $(V \lg + E \lg V) = O(E \lg V)$

Notas

Análise do algoritmo de Prim

- Se heaps de Fibonacci forem usando o tempo de execução assintótico pode ser melhorado
- `extract-min` é executado em tempo amortizado de $O(\lg V)$
- `decrease-key` é executado em tempo amortizado de $O(1)$
- Tempo total do algoritmo melhora para $O(E + V \lg V)$

Notas

Exercícios

23.1-1 Seja (u, v) uma aresta de peso mínimo em um grafo G. Mostre que (u, v) pertence a alguma árvore geradora miníma de G

23.1-2 O professor Sabatier supõe a recíproca do teorema 23.1 dada a seguir. Seja $G = (V, E)$ um grafo conectado não orientado com uma função peso de valor real w definida em E. Seja A um subconjunto de E que está incluído em alguma árvore geradora miníma para G, seja $(S, V - S)$ qualquer conjunto corte de G que respeita A, e seja (u, v) uma aresta segura para A que cruza $(S, V - S)$. Então (u, v) é uma aresta leve para o corte. Mostre que a hipótese do professor é incorreta, fornecendo um contra-exemplo.

Notas

Exercícios

23.1-3 Mostre que, se uma aresta (u, v) está contida em alguma árvore espalhada mínima, então ela é uma aresta leve que cruza algum corte do grafo.

23.1-4 Forneça um exemplo simples de um grafo conectado tal que o conjunto de arestas $\{(u, v) : \text{existe um corte } (S, V - S) \text{ tal que } (u, v) \text{ é uma aresta leve cruzando } (S, V - S)\}$ não forma uma árvore geradora miníma.

Notas

Exercícios

23.2-2 Suponha que o grafo $G = (V, E)$ seja representado por uma matriz de adjacências. Forneça uma implementação simples do algoritmo de Prim para esse caso que seja executada no tempo $O(V^2)$.

23.2-3 A implementação do heap de Fibonacci do algoritmo de Prim é assintoticamente mais rápida que a implementação de heap binário para um grafo esparso $G = (V, E)$, onde $|E| = \Theta(V)$? E no caso de um grafo denso, onde $|E| = \Theta(V^2)$? De que modo $|E|$ e $|V|$ devem estar relacionados para que a implementação de heap de Fibonacci seja assintoticamente mais rápida que a implementação de heap binário?

Notas

Exercícios

23.2-4 Suponha que todos os pesos de arestas de um grafo sejam inteiros no intervalo de 1 a $|V|$. Com que rapidez é possível executar o algoritmo de Kruskal? E se os pesos de arestas forem inteiros no intervalo de 1 a W para alguma constante W?

23.2-5 Suponha que todos os pesos de arestas de um grafo sejam inteiros no intervalo de 1 a $|V|$. Com que rapidez é possível executar o algoritmo de Prim? E se os pesos de arestas forem inteiros no intervalo de 1 a W para alguma constante W?

Notas

Referências

- Thomas H. Cormen et al. Introdução a Algoritmos. 2ª edição em português. Capítulo 23.

Notas